

**Tentamen 5B1209/1215:2, Signaler och system I, för IT och ME,
051021, kl 14⁰⁰ – 19⁰⁰**

Hjälpmedel: Zill-Cullen; Differential Equations with Boundary-Value Problems, Utdelat arbetsmaterial, b Mathematics Handbook, kursens formelsamlingar, räknedosa

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 24p, för betyget 4 minst 32p och för betyget 5 minst 40p. 20 – 23p berättigar till en kompletterande tentamen.

Den som läst kursen senast VT 2005 ersätter uppgift 2 med uppgift 2⁺.

1. Man får veta att differentialekvationen $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0, x > 0$,

bl.a. har lösningarna $y = x$ och $y = x^2$. Använd detta för att bestämma den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x + \frac{1}{x}, x > 0. \quad (7p)$$

2. (Endast för dem som läst kursen HT05)

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 6y' + 13y = 3 \delta(t - p), y(0) = 1, y'(0) = -3. \quad (7p)$$

- 2⁺ (Endast för dem som läst kursen senast VT05)

Signalen $x[n], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, har den tidsdiskreta fouriertransformen (TDFT:n)

$$X(e^{j\omega}) = \cos(\omega/2), -\pi < \omega < \pi.$$

Bestäm $x[n]$. (7p)

3. Låt $x(t) = t e^t u(-t)$,

där $u(t)$ är "enhetssprånget" $\begin{cases} 1, & \text{då } t > 0, \\ 0, & \text{då } t < 0. \end{cases}$

Beräkna de generaliserade 1:a- och 2:a-derivatorna till $x(t)$ och förenkla så långt som möjligt

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t). \quad (8p)$$

4. I ett tabellverk hittar man att fourierserien

$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{24}{\pi^4} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{j\pi n t}$$

i intervallet $0 < t < 1$ är $= (1 + 2t)(t - 1)^2$, (*)

- a. Vilken är den reella fourierserieutvecklingen av $s(t)$? (3p)

- b. Motivera varför $s(t)$ måste vara en jämn funktion och ge ett samband liknande (*) som är giltigt då $-1 < t < 0$. (3p)

- c. Beräkna det exakta värdet av $s(4/3)$. Svaret får inte innehålla summor. (3p)

Motivera noga Dina svar! *Anmärkning:* Uppgiften kan lösas utan omfattande kalkyler.

5. a. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x^2 y' + x(2 - x)y = e^x \cos 3x. \quad (7p)$$

- b. Ange den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(-\pi/2) = 0$ och det största intervall inom vilken lösningen är giltig. (2p)

6. Signalen

$$x(t) = \text{sinc}(100t), t \text{ mätt i sekunder,}$$

bearbetas i två ideala lågpassfilter. Det ena har brytfrekvensen 30 Hz, dvs alla frekvenser över 30 Hz filtreras bort, medan de lägre frekvenserna lämnas orörda. För det andra är brytfrekvensen 100 Hz.

a. Hur stor andel av energin har gått förlorad i vardera fallen?

Energien hos signalen $x(t)$ ges av

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (7p)$$

b. Teckna exakta analytiska uttryck för de *filtrerade* signalerna i de båda fallen. (3p)