

① Metod I (Laplacetransformering)

$$\begin{cases} sX(s) - 0 = 13Y(s) \\ sY(s) - 5 = -2X(s) + 2Y(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s-13 & 0 \\ 2 & s-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-13 & 0 \\ 2 & s-2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} s-2 & 13 \\ -2 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

där  $\Delta = (s-2)s + 26 = s^2 - 2s + 26 = (s-1)^2 + 5^2$ ,

Detta ger  $X(s) = \frac{65}{(s-1)^2 + 5^2} = 13 \cdot \frac{5}{(s-1)^2 + 5^2}$

$$Y(s) = \frac{5s}{(s-1)^2 + 5^2} = \frac{5(s-1)}{(s-1)^2 + 5^2} + \frac{5}{(s-1)^2 + 5^2}$$

och efter återtransformering:

Svar:  $x(t) = 13 \cdot e^t \sin 5t$ ;  $y(t) = 5 \cdot e^t \cos 5t + e^t \sin 5t$ ;

Metod II (Egenvärdesmetoden)

Systemmatrisen är  $\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ . Dess egenvärden ges av

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 13 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 26 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 5i$$

Motsvarande egenvektorer:

$\lambda = 1 + 5i$ :

$$\begin{pmatrix} -1-5i & 13 \\ -2 & 1-5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2v_1 + (1-5i)v_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1-5i \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Detta innebär att t.ex.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5i \\ 2 \end{pmatrix} e^t \cdot e^{5it}$$

är en komplex lösning till systemet.

Eftersom systemet är linjärt och med reella koefficienter så är också real- och imaginärdelarna lösningar till systemet.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} e^t \cdot (\cos 5t + i \sin 5t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t \cos 5t + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \sin 5t \\ \operatorname{Im}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} e^t &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t \sin 5t + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \cos 5t \end{aligned}$$

Systemets allmänna lösning på reell form kan därför skrivas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t \cos 5t + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \sin 5t \right] + B \left[ \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \cos 5t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t \sin 5t \right]$$

Begynnelsevillkoren  $x(0)=0$ ,  $y(0)=5$  ger nu

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \text{ dvs. den sökta lösningen är} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t \cos 5t + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \sin 5t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \cos 5t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t \sin 5t \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} e^t \cos 5t + \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \sin 5t : \underline{\underline{\text{Svar}}} \end{aligned}$$

② Ekvationen kan skrivas

①  $y''(t) + 20y(t) + e^{2t} + 10y(t) = 0$ ;  $y(0)=0$ ,  $y'(0)=1$ .

Laplacetransformering, faktningssatsen och bl.a. det faktum att  $e^{2t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-2}$  ger:

$$s^2 \overbrace{Y(s)}^{y(0)} - \overbrace{0 \cdot s}^{y'(0)} - 1 + 20Y(s) \cdot \frac{1}{s-2} + 10Y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( s^2 + \frac{20}{s-2} + 10 \right) Y(s) = 1 \Leftrightarrow \frac{s^3 - 2s^2 + 10s}{s-2} \cdot Y(s) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{Y(s) = \frac{s-2}{s^3 - 2s^2 + 10s}}} : \underline{\underline{\text{Svar}}}$$

$$(b) \quad Y(s) = \frac{s-2}{s^3-2s^2+10s} = \frac{s-2}{s(s^2-2s+10)} = \frac{s-2}{s((s-1)^2+3^2)} =$$

$$= \left[ \text{partialbröks-} \right] = \frac{A}{s} + \frac{B(s-1)+C}{(s-1)^2+3^2}$$

Man får (t.ex. med "handpåläggning"):  $A = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$

och (sätt t.ex.  $s=1$ ):  $-\frac{1}{9} = -\frac{1}{5} + \frac{C}{9} \Rightarrow C = \frac{4}{5}$

samt  $B = \frac{1}{5}$ , Alltså

$$Y(s) = -\frac{1}{5} \frac{1}{s} + \frac{1}{5} \frac{s-1}{(s-1)^2+3^2} + \frac{4}{5} \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(s-1)^2+3^2}$$

varav efter återtransformation:

$$y(t) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} e^t \cos 3t + \frac{4}{15} e^t \sin 3t : \underline{\text{Svar}}$$

(2+)  $x[n]$  M-periodisk  $\Leftrightarrow x[n+N] = x[n]$  för alla heltal  $n \Leftrightarrow$

$$(a) \Leftrightarrow \cos \left[ (n+N) \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right] = \cos \left( n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow (n+N) \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad [1] \quad (k \text{ heltal}) \quad \text{eller}$$

$$(n+N) \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = - \left( n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) + 2k\pi \quad [2]$$

□ fallet [1]:  $\Leftrightarrow N = 6k \Rightarrow N = 6$  minsta möjliga.

□ fallet [2]:  $\Leftrightarrow N = 6k - 2n - \frac{3}{2}$ , vilket inte går att uppfylla med heltal  $N$ ,  $k$  och  $n$ .

Svar:  $N = 6$

(b) Man har att DFT:n  $X[k]$ ,  $k=0,1,\dots,5$  uppfyller

$$x[n] = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 X[k] W_N^{kn}, \text{ där } W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}, n=0,1,\dots,5, [3]$$

Men

$$x[n] = \cos \left( n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} e^{j(n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} + \frac{1}{2} e^{-j(n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{3}}}_{= e^{j\frac{2\pi}{3}}} = \underbrace{\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}}_{\bar{X}[1]} W + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}_{\bar{X}[5]} W^5 \quad [4]$$

Jämförelse mellan [3] och [4] ger:

Svar:  $\bar{X}[1] = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$ ,  $\bar{X}[5] = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$  och  $\bar{X}[k] = 0$  för  $k=0, 2, 3, 4$ .

- (3) (a) Ekvationen är linjär och av 1:a ordningen. På "normerad" form skrivs den:

$$y' - \frac{x}{x-1} y = \frac{1}{(x-1)^2} e^x$$

En integrerande faktor är  $e^{\int -\frac{x}{x-1} dx} = e^{\int -1 - \frac{1}{x-1} dx} =$

$$= e^{-x - \ln|x-1|} = \frac{e^{-x}}{(x-1)}$$

Efter multiplikation med denna för ekvationen formen

$$\left( \frac{e^{-x}}{x-1} \cdot y \right)' = \frac{e^{-x}}{x-1} \cdot \frac{e^x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^3}$$

Integration ger:

$$\frac{e^{-x}}{x-1} \cdot y = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C \Leftrightarrow y = -\frac{e^x}{2(x-1)} + C(x-1)e^x: \underline{\text{Svar}}$$

- (b) Alla lösningarna, oavsett C-värde, är singulära i  $x=1$ , och enbart där. Det maximala definitionsintervallet är därför antingen  $x < 1$  eller  $x > 1$ . Då startpunkten är  $x=0$ , så är det fråga om det förstnämnda.

Svar:  $x < 1$ .

(4) Vi använder att  $e^{-at} \xrightarrow{FT} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (a > 0)$

och faltningssetsen för fouriertransformen för att först bestämma den givna faltningens fouriertransform:

4 forts

Man får

$$e^{-a|t|} * e^{-2|t|} \xrightarrow{FT} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} * \frac{4}{4 + \omega^2}$$

Om  $a \neq 2$  så gör partialbräksuppdelning

$$\frac{8a}{(a^2 + \omega^2)(4 + \omega^2)} = \frac{\frac{8a}{4 - a^2}}{a^2 + \omega^2} + \frac{\frac{8a}{a^2 - 4}}{4 + \omega^2} = \frac{4}{4 - a^2} \cdot \frac{2a}{a^2 + \omega^2} - \frac{2a}{4 - a^2} \cdot \frac{4}{4 + \omega^2}$$

Ätertransformering ger:

$$e^{-a|t|} * e^{-2|t|} = \frac{4e^{-a|t|}}{4 - a^2} - \frac{2ae^{-2|t|}}{4 - a^2} = \frac{2}{4 - a^2} (2e^{-a|t|} - ae^{-2|t|})$$

Om  $a = 2$  så blir fältningens fouriertransform  $\frac{16}{(4 + \omega^2)^2} = F(\omega)$

Ätertransformering kan avlösas i en mera väl sorterad tabell

(t.ex. s. 4 i uppg. 4, fourier tabellen, F44 med  $a=2, b=16, \kappa=C=0$ )

Man får  $e^{-2|t|} (|t| + \frac{1}{2})$ ;

Svar:  $\frac{2}{4 - a^2} (2e^{-a|t|} - ae^{-2|t|})$  om  $a \neq 2$   
 $e^{-2|t|} (|t| + \frac{1}{2})$  om  $a = 2$

Alternativt kan man för undantagsfallet  $a=2$  använda att

$$\begin{aligned} e^{-2|t|} * e^{-2|t|} &= \lim_{a \rightarrow 2} (e^{-a|t|} * e^{-2|t|}) = \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 2} \frac{2e^{-a|t|} - ae^{-2|t|}}{4 - a^2} = [\text{L'Hospitals regel}] = \\ &= 2 \cdot \lim_{a \rightarrow 2} \frac{2(-|t|)e^{-a|t|} - e^{-2|t|}}{-2a} = (|t| + \frac{1}{2}) e^{-2|t|} \end{aligned}$$

Ytterligare ett alternativ är att använda FT:s mer grundläggande egenskaper. T.ex.

Utgå från:

$$\frac{4}{\omega^2 + 4} \xrightarrow{FT^{-1}} e^{-2|t|}$$

Multiplikera med  $\omega$  ( motsvarar  $-i \frac{d}{dt}$  på tidsidan):

$$\frac{4\omega}{\omega^2 + 4} \xrightarrow{FT^{-1}} -i \frac{d}{dt} (e^{-2|t|}) = 2i(\text{sign } t) e^{-2|t|}$$

Derivera med avseende på  $\omega$  ( motsvarar mult. med  $-it$  på tidsidan)

$$\frac{4(4 - \omega^2)}{(\omega^2 + 4)^2} \xrightarrow{FT^{-1}} (-it) \cdot 2i(\text{sign } t) e^{-2|t|} = 2|t| e^{-2|t|}$$

$$\text{Men } \frac{4(4 - \omega^2)}{(\omega^2 + 4)^2} = \frac{4(8 - (4 + \omega^2))}{(\omega^2 + 4)^2} = 2 \cdot \frac{16}{(\omega^2 + 4)^2} - \frac{4}{\omega^2 + 4} = 2F(\omega) - \frac{4}{\omega^2 + 4}$$

där  $F(\omega)$  enligt ovan är transformen av  $e^{-2|t|} * e^{-2|t|}$

$$\text{Alltså } 2(e^{-2|t|} * e^{-2|t|}) - e^{-2|t|} = 2|t| e^{-2|t|}$$

$$\text{dvs. } e^{-2|t|} * e^{-2|t|} = (|t| + \frac{1}{2}) e^{-2|t|}$$

(5)  
(a)

$$x(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & |t| \leq 1, \\ (t-1)/(t-3) & 1 < t < 3. \end{cases}$$

och 4-periodisk.

$x(t)$  är tydligen kontinuerlig.

$$\Rightarrow x'(t) = \begin{cases} -2t & |t| \leq 1, \\ 2t-2 & 1 < t < 3 \end{cases}$$

och 4-periodisk.

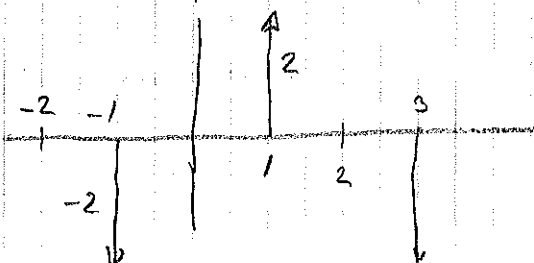
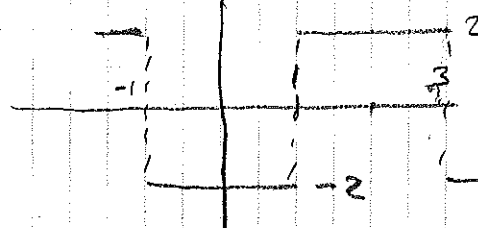
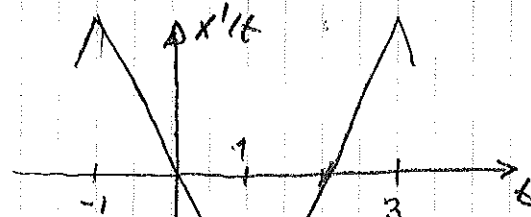
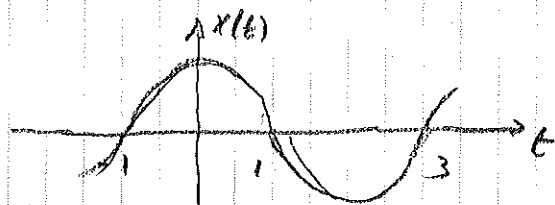
Även  $x'(t)$  är kontinuerlig.

$$\Rightarrow x''(t) = \begin{cases} -2 & |t| < 1, \\ 2 & 1 < t < 3 \end{cases}$$

och 4-periodisk.

$$\Rightarrow x''' = -4\delta(t+1) + 4\delta(t-1)$$

där  $-2 < t < 2$  och är 4-periodisk.



5 forts

$x(t)$ :s fourierserie har formen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi/2 t}$$

och dess 3:e-derivata:

$$x'''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\pi/2)^3 c_n e^{jn\pi/2 t}$$

Analyskvationen, tillämpad på  $x'''$ , ger:

$$\begin{aligned} (jn\pi/2)^3 c_n &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x'''(t) e^{-jn\pi/2 t} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (-48(t+1) + 48(t-1)) e^{-jn\pi/2 t} dt = \\ &= -1 \left( e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2} \right) = -2j \sin \frac{n\pi}{2}, \text{ varav för } n \neq 0 \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{16}{j^3 n^3 \pi^3} (-j \sin \frac{n\pi}{2}) = \frac{16 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^3 \pi^3}$$

För  $n=0$  har vi

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^3 x(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-t^2) dt + \frac{1}{4} \int_1^3 (t-1)(t-3) dt \\ &= \left[ \text{Sätt } t=\tau+2 \text{ i den senare integralen} \right] = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-t^2) dt + \frac{1}{4} \int_1^3 (\tau+1)(\tau-1) d\tau = 0 \end{aligned}$$

lika så när som på tecknet

Svar:  $c_n = \frac{16 \sin n\pi/2}{n^3 \pi^3}$  om  $n \neq 0$ ,  $c_0 = 0$

- (b) Fourierserien  $\sum c_n e^{jn\pi/2 t} = \sum c_n e^{2\pi j \frac{n}{4} t}$  är summan av harmoniska svängningar med frekvenserna  $\frac{10^3}{4} \cdot n = 250n \text{ Hz}$ . Enligt beräkningarna ovan utgör de jämna multiplerna av dessa ( $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$  om  $n$  jämnt).

Filtret tar bort alla frekvenser  $> 500 \text{ Hz}$ , varför  $\hat{x}(t)$  består av en enda harmonisk svängning (med frekvens  $250 \text{ Hz}$ );  
dvs.

$$\hat{x}(t) = c_1 e^{-j\frac{\pi}{2}t} + c_2 e^{j\frac{\pi}{2}t} = \frac{16}{\pi^3} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{2}t$$

→ Svar:  $\hat{x}(t) = \frac{32}{\pi^3} \cos \frac{\pi}{2}t$

(c.) Vi har 
$$\frac{\|\hat{x}(t) - \cos \frac{\pi}{2}t\|^2}{\|\cos \frac{\pi}{2}t\|^2} = \frac{\int_{-2}^2 \left(\frac{32}{\pi^3} - 1\right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{2}t dt}{\int_{-2}^2 \cos^2 \frac{\pi}{2}t dt} =$$

$$= \left(\frac{32}{\pi^3} - 1\right)^2 \approx 1\% : \underline{\text{Svar}}$$

(6a.) Man har  $x_2(t) = \sin 880\pi t + \sin 882\pi t =$

$$= [\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}] = \sin 881\pi t \cdot \cos \pi t$$

Detta är en harmonisk svängning,  $\sin 881\pi t$  (med frekvens  $440.5 \text{ Hz}$ )

Varis amplitud moduleras av  $2\cos \pi t$ .

Ett lokmaximum finns för  $t=0$ . De nollställena till

modulatorens som ligger närmast är  $t = \pm \frac{1}{2}$ .

Varaktigheten är alltså 1.

→ Svar: 1

(b.) 
$$x_p(t) = \sum_{n=0}^{p-1} \sin(2\pi(440+n)t) = \text{Im} \sum_{n=0}^{p-1} e^{2\pi j(440+n)t} =$$

$$= \text{Im} \left( e^{2\pi j 440t} \cdot \sum_{n=0}^{p-1} e^{2\pi j n t} \right) = [\text{Summationsformeln}] =$$

$$= \text{Im} \left( \underbrace{e^{2\pi j 440t}}_{e^{2\pi j (440 + \frac{p}{2})t}} \cdot e^{\pi j p t} \cdot \frac{\sin \pi p t}{\sin \pi t} \right) =$$

$$= \sin\left(\underbrace{2\pi\left(400 + \frac{P}{2}\right)t}_{f_0}\right) \cdot \underbrace{\frac{\sin \pi P t}{\sin \pi t}}_{H(t)} \quad \text{Modulatorn ges alltså av}$$

$$H(t) = \frac{\sin \pi P t}{\sin \pi t}, \text{ som är 1-periodisk, (ty } \frac{\sin \pi P(t+1)}{\sin \pi(t+1)} = \frac{-\sin \pi P t}{-\sin \pi t} = \frac{\sin \pi P t}{\sin \pi t})$$

och den modulerade tonen har frekvensen  $(400 + \frac{P}{2})$  Hz.

Svar:  $H(t) = \frac{\sin \pi P t}{\sin \pi t}, f_0 = 400 + \frac{P}{2} \text{ Hz}$

- (C) Modulatorn har ett maximum  $P$  då  $t=0$ . Dess 0-ställen inträffar då  $\sin \pi P t = 0$  och  $t$  inte är ett heltal. De till  $t=0$  närmaste 0-ställena är därför  $t = \pm \frac{1}{P}$ . Lobens varaktighet är alltså  $\frac{2}{P}$ .