Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen, 5B1209 och 5B1215:2, Signaler och system I, för E, ME och IT,
den 7 juni 2006, kl 14.00 – 19.00

Hjälpmedel: Zill-Cullen; Differential Equations with Boundary-Value Problems, Utdelat arbetsmaterial, β Mathematics Handbook, kursens formelsamlingar, räknedosa.

För dem som läst kursen senast VT05 dessutom Oppenheim-Willsky: Signals and systems, Hjalmarsson: Kompletterande kursmaterial för Signaler och system I.

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 24p, för betyget 4 minst 32p och för betyget 5 minst 40p.
20 – 23p berättigar till en kompletterande tentamen.

Den som läst kursen senast VT 2005 ersätter uppgift 6 med uppgift 6^+.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$\sqrt{1+x}\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$$

som uppfyller villkoret $y(0) = 9$ och ange det största intervall i vilket lösningen är giltig. (5p)

2. Signalen $x(t)$ har fouriertransformen

$$X(\omega) = \frac{30 - 5j\omega}{\omega^2 + j\omega + 6},\ \omega \text{ mätt i radianer/tidsenhet.}$$

Bestäm $x(t)$.
Svaret får inte innehålla några integraler. (8p)

3. Funktionen $y(x)$ är deriverbar och uppfyller villkoren

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = y + x \quad \text{och } y(0) = 0.$$

a. Bestäm $y(x)$. (6p)
b. Ange det största intervall i vilket lösningen är giltig. (2p)

4. a. Beräkna fouriertransformen till signalen

$$x(t) = \frac{\sin^2 at}{t},\ a \text{ en konstant} > 0. \qquad (6p)$$

(Tips: Signalen kan skrivas $a \sin at \cdot \dfrac{\sin at}{at}$.)

b. Vilken är signalens totala energi? (3p)
Svaren får inte innehålla integraler eller oändliga serier.

5. Bestäm funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ så att

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y - 5, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y - 3t \end{cases}$$

och $x(0) = 2$, $y(0) = 0$. (10p)

Var god vänd!

6. (*Endast för dem som läst kursen HT05*)

Ett infanteriregemente marscherar taktfast över en bro som därmed kommer i svängning. Avvikelsen $y(t)$, i mm, från jämviktsläget vid brons mittpunkt kan, vid försumbar dämpning, för $t > 0$ antas uppfylla differentialekvationen

$$y'' + y = f(t),$$

där stötpåkänningen $f(t)$ orsakad av marscherandet ges av

$$f(t) = \sum_{n=1}^{1000} 5\delta(t - 2\pi n).$$

$\delta(t)$ är som vanligt Diracs deltafunktion.

a. Bestäm $y(t)$ då $y(0) = y'(0) = 0$. (6p)

b. Ge på så enkel form som möjligt uttryck för lösningen då $0 < t < 2\pi$, $2\pi < t < 4\pi$ respektive $4\pi < t < 6\pi$. (2p)

c. Allmännare: Hur blir motsvarande uttryck i intervallet $2\pi N < t < 2\pi(N + 1)$, N positivt heltal ≤ 1000?
Har man skäl att tro att bron håller? (2p)

6⁺ (*Endast för dem som läst kursen senast VT05*)

Man vet om en viss signal $x(t)$ att dess spektrum är $\neq 0$ endast i frekvensintervallet 4 – 6 kHz. Signalen samplas med en samplingsfrekvens $f_s = \dfrac{1}{T}$:

$$x_s[n] = x(nT): n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

För vissa värden på f_s, t.ex för 2 × bandbredden kan som bekant signalen rekonstrueras exakt utifrån sampelvärdena $x_s[n]$, $n = 0. \pm1, \pm2, \ldots$ Rekonstruktionen har formen av en serie

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s[n]\, g(t - nT),$$

där $g(t)$ är en lämpligt vald funktion.

a. Vilken är denna funktion $g(t)$ om $f_s = 2 \times$ bandbredden? (2p)

b. Visa att en exakt rekonstruktion kan göras också då $f_s = 4$ kHz och bestäm funktionen $g(t)$ i detta fall. (8p)

Lycka till!