

①. Ekvationen är linjär. På "normal" form lyder den:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = 0$$

Integrerande faktor är

$$k(x) = e^{\int -\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

Multiplikation med denna ger

$$\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Efter integration får man $\frac{y}{x} = \ln|x| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C$

Begynnelsevillkoret ger $0 = 0 + \frac{1}{2} + C$, d.v.s. $C = -\frac{1}{2}$

$$\text{Alltså } y = x \ln|x| + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x \right)$$

Denna funktion är singular endast då $x=0$ (hur om $\frac{1}{x}$ ej definierade blir)
Det största intervall som innehåller begynnelsepunkten $x=1$ och i vilket lösningen existerar är därmed $x > 0$.

$$\text{Svar: } y = x \ln x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x \right), \quad x > 0$$

②. Ekvationen kan skrivas

$$3y(t) + 3\sin t = 3\cos t + 10y(t) + \cos t$$

där x betecknar Laplacefaktning.

Laplace transformering ger

$$3\bar{Y}(s) + 3 \cdot \frac{1}{1+s^2} = 3 \frac{s}{1+s^2} + 10 \cdot \bar{Y}(s) \cdot \frac{s}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (3(s^2+1) - 10s) \bar{Y}(s) = 3(s-1)$$

$$\Leftrightarrow \bar{Y}(s) = \frac{3(s-1)}{3s^2 - 10s + 3} = \frac{s-1}{s^2 - \frac{10}{3}s + 1} = \left[\begin{array}{l} s^2 - \frac{10}{3}s + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow s = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \left\{ \frac{3}{3}, \frac{1}{3} \right\} \end{array} \right] = \frac{s-1}{(s-3)(s-\frac{1}{3})} =$$

$$= [\text{Partialbröksuppdelning}] = \frac{\frac{3}{4}}{s-3} + \frac{\frac{1}{4}}{s-\frac{1}{3}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{3}{4} e^{3t} + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{3}t} = y(t)$$

$$\text{Svar: } y(t) = \frac{3}{4} e^{3t} + \frac{1}{4} e^{t/3}$$

2+ 9.

$$x[n+56] = \sin\left(\frac{(n+56)\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{(n+56)\pi}{4}\right) = \sin\left(n\frac{\pi}{7} + 8\pi\right) + \cos\left(n\frac{\pi}{4} + 14\pi\right) = \\ = \sin\frac{n\pi}{7} + \cos\frac{n\pi}{4} = x[n]$$

$x[n]$ är alltså 56-periodisk.

För koeficienterna a_k , $k=1, \dots, 56$ (DFT:n) till $x[n]$ gäller

$$x[n] = \sum_{k=1}^{56} a_k e^{j\pi n k / 28} \quad (\text{synthes}) \quad \text{och} \quad a_k = \frac{1}{56} \sum_{n=1}^{56} x[n] e^{-j\pi n k / 28} \quad (\text{analys})$$

$$\text{I vårt fall är } x[n] = \frac{1}{2j} (e^{j\frac{n\pi}{7}} - e^{-j\frac{n\pi}{7}}) + \frac{1}{2} (e^{j\frac{n\pi}{4}} + e^{-j\frac{n\pi}{4}}) =$$

$$= \frac{1}{2j} (e^{j\frac{4n\pi}{28}} - e^{-j\frac{4n\pi}{28}}) + \frac{1}{2} (e^{j\frac{7n\pi}{28}} + e^{-j\frac{7n\pi}{28}}) =$$

$$= \frac{1}{2j} \left(e^{j\frac{4n\pi}{28}} \right)_{k=4} - \frac{1}{2j} \left(e^{j\frac{4n\pi}{28}} \right)_{k=56-4} + \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{7n\pi}{28}} \right)_{k=7} + \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{7n\pi}{28}} \right)_{k=56-7}$$

Jämförelse med syntesequationen ger:

$$a_4 = \frac{1}{2j}, \quad a_7 = a_{49} = \frac{1}{2}, \quad a_{52} = -\frac{1}{2j}, \quad \text{övriga } a_k = 0.$$

b) Analytisk med $k=0$ (eller 56)

$$\sum_{n=1}^{56} x[n] = 56a_0 = 56a_{56} = [\text{enl. a}] = 0$$

c) Parsevals relation för DFT:

$$\sum_{n=1}^{56} |x[n]|^2 = 56 \sum_{k=1}^{56} |a_k|^2$$

I vårt fall är enligt a)

$$56 \sum_{k=1}^{56} |a_k|^2 = 56 (|a_4|^2 + |a_7|^2 + |a_{49}|^2 + |a_{52}|^2) = 56 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 56.$$

Svars a) $a_4 = \frac{1}{2j}$, $a_7 = a_{49} = \frac{1}{2}$, $a_{52} = -\frac{1}{2j}$, övriga $a_k = 0$, $k=1, \dots, 56$,

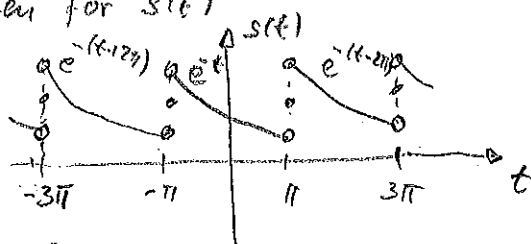
b) 0,

c) 56,

③ a) Analysvärden för FS:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t} e^{-jnt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+jn)t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-(1+jn)t}}{-(1+jn)} \right]_{t=-\pi}^{\pi} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+jn} (e^{(1+jn)\pi} - e^{-(1+jn)\pi}) = \left[\begin{array}{c} e^{j n \pi} = e^{-j n \pi} \\ = (-1)^n \end{array} \right] = \frac{(-1)^n}{2\pi(1+jn)} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \\
 &\left(= \frac{(-1)^n}{\pi(1+jn)} \cdot \sinh \pi \right).
 \end{aligned}$$

⑤ Grafen för $s(t)$



$t=4$ ligger $\pi < t < 3\pi$ och där är $s(t) = e^{-(t-2\pi)}$
 Alltså $s(4) = e^{2\pi-4}$

⑥ $t=\pi$ är en språnpunkt varför $s(\pi) = \frac{s(\pi+) + s(\pi-)}{2} =$
 $= \frac{e^{-\pi} + e^{-(\pi-2\pi)}}{2} = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} (= \cosh \pi)$

Svar: a) $c_n = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi(1+jn)} (-1)^n$

b) $s(4) = e^{2\pi-4}$

c) $s(\pi) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$

④ Variant 1 (Laplace transformering)

Man får

$$\begin{cases} sX(s) - 1 - 5(sY(s) - 2) = -5X(s) \\ 2(sX(s) - 1) - 5(sY(s) - 2) = -25Y(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s+5)X - 5sY = -9 \\ 2sX - (5s-25)Y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s+5 & -5s \\ 2s & -5(s-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

4 forts. $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -5(s-5) & 5s \\ -2s & s+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix}$, där $\Delta = -5(s^2-25) + 10s^2 = 5(s^2+25)$,

varav $\bar{X} = \frac{45s - 25 \cdot 9 - 40s}{5(s^2+25)} = \frac{s-45}{s^2+25} = \frac{s}{s^2+5^2} - 9 \cdot \frac{5}{s^2+5^2}$

$\bar{Y} = \frac{18s - 8s - 40}{5(s^2+25)} = \frac{2s-8}{s^2+25} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+5^2} - \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{s^2+5^2}$

Med tanke på att $\frac{s}{s^2+a^2} \xrightarrow{y^{-1}} \cos at$ och $\frac{a}{s^2+a^2} \xrightarrow{y^{-1}} \sin at$ så för man

Svar: $x(t) = \cos 5t - 9 \sin 5t$, $y(t) = 2 \cos 5t - \frac{8}{5} \sin 5t$

Variant 2: (Egenvärdesmetoden)

Systemmatrisen för man genom att lösa ut $\frac{dx}{dt}$ och $\frac{dy}{dt}$ ur det givna systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x \\ -25y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1/25} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 \\ \frac{2}{25} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -25 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}_{\text{systemmatris}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Systemets egenvärden:

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -25 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25 \Leftrightarrow \lambda = \pm 5i$$

De komplexa egenvektorena som hör till egenvärdet $\lambda = 5i$:

$$\begin{pmatrix} 5-5i & -25 \\ 2 & -5-5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2v_1 - 5(1+i)v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 5(1+i) \\ 2 \end{pmatrix}$$

Detta betyder att systemet som en komplex lösning har:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(1+i) \\ 2 \end{pmatrix} e^{5it} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) (\cos 5t + i \sin 5t) =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 5t - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 5t \right] + i \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 5t + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 5t \right]$$

Eftersom det givna systemet är reellt, så är real- resp. imaginärdelarna till denna lösning också lösningar till systemet.

4 forts.

$$\text{Re: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cos 5t - 5 \sin 5t \\ 2 \cos 5t \end{pmatrix}; \text{Im: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cos 5t + 5 \sin 5t \\ 2 \sin 5t \end{pmatrix}$$

Dessa är linjärt oberoende (ex. vis är de för $t=0$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ resp $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, vilka är linjärt oberoende). Allmän lösning till det givna systemet är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cos 5t - 5 \sin 5t & 5 \cos 5t + 5 \sin 5t \\ 2 \cos 5t & 2 \sin 5t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad A, B \text{ konstanter.}$$

För $t=0$ får man enligt begynnelsevärdena:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4/5 \end{pmatrix}$$

varav

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \cos 5t - 5 \sin 5t \\ 2 \cos 5t \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 5 \cos 5t + 5 \sin 5t \\ 2 \sin 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 5t - 9 \sin 5t \\ 2 \cos 5t - \frac{8}{5} \sin 5t \end{pmatrix}$$

Svar: Som ovan.

5. a) Enligt faktoriseringssatsen är den sökta transformen produkten av transformerna för "faktorerarna" $\sin 2t$ och $\frac{t+3}{t^2+6t+13}$

Man har $\sin t \xrightarrow{FT} \text{rect } f = \text{rect } \frac{\omega}{2\pi}$
 $\sin 2t \xrightarrow{FT} \frac{1}{2} \text{rect } \frac{\omega}{4\pi}$

Vidare är $\frac{t+3}{t^2+6t+13} = \frac{t+3}{(t+3)^2+2^2}$ och man har att

$$\frac{1}{t^2+2^2} \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|}$$

$$t \cdot \frac{1}{t^2+2^2} \xrightarrow{FT} j \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|} \right) = j \frac{\pi}{2} \cdot e^{-2|\omega|} \cdot (-2) \cdot \text{sign } \omega = -j \pi e^{-2|\omega|} \text{sign } \omega$$

$$(t+3) \frac{1}{(t+3)^2+2^2} \xrightarrow{FT} e^{3j\omega} \cdot (-j) \pi e^{-2|\omega|} \text{sign } \omega$$

Alltså $x(t) \xrightarrow{FT} -j \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|} \cdot e^{3j\omega} \cdot \text{sign } \omega \cdot \text{rect } \frac{\omega}{4\pi}$

5b. Parsevals relation for FT: $I = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

6.

I work fall år, eftersom $|e^{3j\omega}|^2 = 1$ och $|\text{sign } \omega| = 1$, samt $|\text{rect}(\frac{\omega}{4\pi})|^2 = \text{rect} \frac{\omega}{4\pi} = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2\pi, \\ 0, & |\omega| > 2\pi. \end{cases}$

$$|X(\omega)|^2 = |-j|^2 \frac{\pi^2}{4} e^{-4|\omega|} |e^{3j\omega}|^2 \cdot |\text{sign } \omega|^2 \cdot |\text{rect} \frac{\omega}{4\pi}|^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} e^{-4|\omega|} \cdot \text{rect} \frac{\omega}{4\pi}$$

varian $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\pi^2}{4} e^{-4|\omega|} d\omega = \frac{\pi^2}{4} \cdot 2 \cdot \int_0^{2\pi} e^{-4\omega} d\omega =$

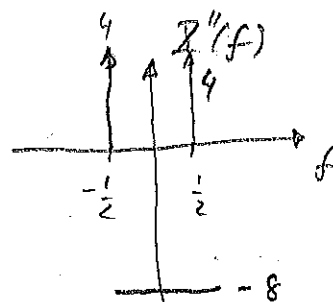
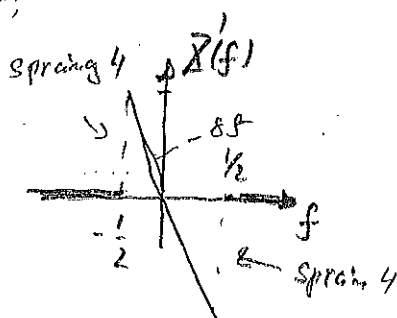
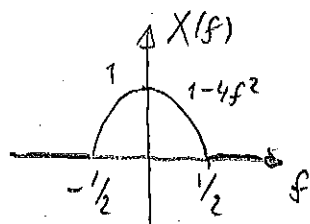
$$= \frac{\pi^2}{2} \left[\frac{e^{-4\omega}}{-4} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{8} (1 - e^{-8\pi})$$

Alltså $I = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^2}{8} (1 - e^{-8\pi})$

Svar: a) $-j \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|} e^{3j\omega} \text{sign } \omega \cdot \text{rect} \frac{\omega}{4\pi}$

b) $\frac{\pi}{16} (1 - e^{-8\pi})$

6) a. Vi deriverar $X(f)$ 2 ggr för att få en enkla funktion att arbeta med; grafer:



$$X'(f) = -8f \cdot \text{rect } f$$

$$X''(f) = -8 \cdot \text{rect } f + 4(\delta(f + \frac{1}{2}) + \delta(f - \frac{1}{2}))$$

Man har $X''(f) \xrightarrow{FT^{-1}} (-2\pi j t)^2 \cdot x(t) = -4\pi^2 t^2 \cdot x(t)$

$$\text{rect}(f) \xrightarrow{FT^{-1}} \text{sinc } t$$

$$\delta(f + \frac{1}{2}) + \delta(f - \frac{1}{2}) \xrightarrow{FT^{-1}} 2 \cos 2\pi \cdot \frac{1}{2} t$$

6a för b

Lösning

$$+ 4\pi^2 t^2 x(t) = -8 \sin \pi t + 8 \cos \pi t$$

$$\text{rekan} \quad x(t) = 2 \frac{\sin \pi t - \cos \pi t}{\pi^2 t^2} = 2 \frac{\frac{\sin \pi t}{\pi t} - \cos \pi t}{\pi^2 t^2} = 2 \frac{\sin \pi t - \pi t \cos \pi t}{\pi^3 t^3}$$

b] Fourierkoefficienterna, c_n , till den 4-periodiska förhållningen, x_{per} , erhålls direkt av $x(t)$:

$$c_n = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x(t) e^{-\pi j n t / 2} dt = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \Big|_{f = \frac{n}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} \mathcal{F}\left(\frac{n}{4}\right) = \begin{cases} \text{enligt den givna} \\ \text{definitionen av } \mathcal{F} \end{cases} = \begin{cases} 1/4, & \text{om } n=0 \\ 3/16, & \text{om } n=\pm 1 \\ 0, & \text{för övriga } n \end{cases}$$

Eftersom Fourierserien för x_{per} har formen:

$$x_{\text{per}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{n j \pi t / 2}$$

$$\text{Så för oss gäller } x_{\text{per}}(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} (e^{j \pi t / 2} + e^{-j \pi t / 2}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cos \frac{\pi t}{2}$$

Svar: a] $x(t) = \frac{2}{\pi^3 t^3} (\sin \pi t - \pi t \cos \pi t)$,

b] $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cos \frac{\pi t}{2}$.