1 a. Finn allmänna lösningen till ekvationen

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=1.$$

Lösning: Dela med $1+x^2$. Vi får

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1+x^2}y=\frac{1}{1+x^2}.$$

Observera att

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$$

för någon konstant c. Genom att välja $c=0$ får vi en integrerande faktor

$$\exp[\arctan x]$$

varav

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\exp[\arctan x]y) &= \exp[\arctan x]\left(\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1+x^2}y\right)=\{\text{ekvationen}\}\\ &= \frac{1}{1+x^2}\exp[\arctan x]=\frac{d}{dx}\exp[\arctan x].\end{aligned}$$

Om vi integrerar denna likhet får vi

$$\exp[\arctan x]y=\exp[\arctan x]+C_1$$

för någon konstant C_1. Alltså får vi
Svar:

$$y=1+C_1\exp[-\arctan x].$$

b. Finn lösningen som uppfyller $y(0)=0$.

Lösning: Kravet

$$0=y(0)=1+C_1\exp[-\arctan 0]=1+C_1$$

ger $C_1=-1$ varav
Svar:

$$y(x)=1-\exp[-\arctan x].$$

2 Antag att vi har ett linjärt system som fungerar så att om signalen vi skickar in är $x_{in}(t)$ för $t\geq 0$ så är signalen som kommer ut, säg $x_{ut}(t)$, given av

$$x_{ut}(t)=\int_0^t h(t-\tau)x_{in}(\tau)d\tau \tag{1}$$

för en funktion $h(t)$, $t\geq 0$. Funktionen $h(t)$ är inte given, men vi vet att om $x_{in}(t)=e^{-t}$, så är $x_{ut}(t)=\sin t$.

a (3 poäng). Beräkna Laplacetransformen av $h(t)$.

Lösning: Om $X_{in}(s)$, $X_{ut}(s)$ och $H(s)$ betecknar Laplacetransformerna av $x_{in}(t)$, $x_{ut}(t)$ respektive $h(t)$ så medför (1) att

$$X_{ut}(s)=H(s)X_{in}(s). \tag{2}$$

Men vi vet att om

$$X_{in}(s)=\frac{1}{s+1}$$

så är

$$X_{ut}(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Alltså är

Svar:

(3) $$H(s) = \frac{X_{ut}(s)}{X_{in}(s)} = \frac{s+1}{s^2+1}.$$

b (5 poäng). Givet att $x_{in}(t) = e^{-2t}$, beräkna $x_{ut}(t)$ given av (1).

Lösning: Enligt (2), det faktum att $H(s)$ ges av (3) och det faktum att

$$X_{in}(s) = \frac{1}{s+2},$$

får vi

$$\begin{aligned} X_{ut}(s) &= \frac{s+1}{s^2+1}\frac{1}{s+2} = \frac{s+1}{(s^2+1)(s+2)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+2} \\ &= \frac{(As+B)(s+2)+C(s^2+1)}{(s^2+1)(s+2)}. \end{aligned}$$

Kravet på konstanterna A, B och C är

$$(As+B)(s+2)+C(s^2+1) = s+1.$$

Med $s=-2$ får vi $5C=-1$, så $C=-1/5$ och $s=0$ ger sedan $2B-1/5=1$, varav $B=3/5$. Slutligen ger $s=1$ att $3A+9/5-2/5=2$ varav $A=1/5$. Alltså har vi

$$X_{ut}(s) = \frac{1}{5}\frac{s+3}{s^2+1} - \frac{1}{5}\frac{1}{s+2},$$

varav

Svar:

$$x_{ut}(t) = \frac{1}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t - \frac{1}{5}e^{-2t}.$$

2^+ (8 poäng). Bestäm den tidsdiskreta fouriertransformen ("TDFT:n") till signalen $h[n] = 3^{-|n-1|} + 3^{-|n+1|}, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Lösning: De båda termerna är tids-translat av signalen $3^{-|n|}$. Enligt tabell är för $|a| < 1$ den tidsdiskreta fouriertransformen av $a^{|n|}$: $\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2}$, $(\omega = 2\pi\nu)$. Använder man att $\mathcal{TDFT}\{x[n-n_0]\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n_0\omega}\mathcal{TDFT}\{x[n]\}$ och sätter $a = \dfrac{1}{3}$, så får man:

$$\begin{aligned} &3^{-|n|} \xrightarrow{\mathcal{TDFT}} \frac{1-(1/3)^2}{1-2\cdot(1/3)\cdot\cos\omega+(1/3)^2} = \frac{4}{5-3\cos\omega}, \\ &3^{-|n-1|} \xrightarrow{\mathcal{TDFT}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi\omega}\cdot\frac{4}{5-3\cos\omega}, \\ &3^{-|n+1|} \xrightarrow{\mathcal{TDFT}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi\omega}\cdot\frac{4}{5-3\cos\omega}, \\ &3^{-|n-1|}+3^{-|n+1|} \xrightarrow{\mathcal{TDFT}} (\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi\omega}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi\omega})\cdot\frac{4}{5-3\cos\omega} = \frac{8\cos\omega}{5-3\cos\omega}. \end{aligned}$$

Svar:

$$\frac{8\cos\omega}{5-3\cos\omega}, (\omega = 2\pi\nu).$$

Anmärkning: Utan att använda tabell har man:

$$
\begin{aligned}
a^{|n|} &\overset{\mathcal{TDFT}}{\longrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} = \sum_{n=-\infty}^{0} a^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^n - 1 = \left[\begin{array}{l}\text{Geometriska serier med} \\ \text{kvoterna } a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} \text{ och } a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}.\end{array}\right] \\
&= \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} + \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} - 1 = \frac{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} + 1 - a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - (1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} + a^2)}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} + a^2} \\
&= \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega + a^2}.
\end{aligned}
$$

3 Lös ekvationen

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -y - \sin t \\
\frac{dy}{dt} &= x + \cos t,
\end{aligned}
$$

med begynnelsevärden givna av $x(0) = 1$ och $y(0) = 1$.

Lösning: Låt X och Y beteckna Laplacetransformerna av x respektive y. Om vi Laplacetransformerar ekvationen får vi

$$
\begin{aligned}
sX(s) - 1 &= -Y(s) - \frac{1}{s^2+1} \\
sY(s) - 1 &= X(s) + \frac{s}{s^2+1}.
\end{aligned}
$$

På matrisform får vi

$$
\begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{s^2+1}\begin{pmatrix} -1 \\ s \end{pmatrix}
$$

Eftersom

$$
\begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+1}\begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix}
$$

får vi att

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} &= \frac{1}{s^2+1}\begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{(s^2+1)^2}\begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ s \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2+1}\begin{pmatrix} s-1 \\ s+1 \end{pmatrix} + \frac{1}{(s^2+1)^2}\begin{pmatrix} -2s \\ s^2-1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Med hjälp av β får man nu

Svar:

$$
x(t) = \cos t - \sin t - 2\frac{t\sin t}{2} = \cos t - \sin t - t\sin t
$$

samt

$$
y(t) = \cos t + \sin t + \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t) - \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) = \cos t + \sin t + t\cos t.
$$

I detta skede är det lämpligt att kontrollera att svaret uppfyller ekvationen och har korrekt begynnelsevärden.

4 Låt $x(t)$ vara en 1-periodisk funktion given av

$$
x(t) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2
$$

då $0 \le t \le 1$. Beräkna de reella talen a_n för $n \ge 0$ och b_n för $n \ge 1$ sådana att

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n t) + b_n \sin(2\pi n t)]. \tag{4}$$

Lösning: Låt

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{om } \ 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{om } \ t < 0 \ \text{ eller } \ t > 1. \end{cases}$$

Låt $X_0(\omega)$ vara fouriertransformen av $x_0(t)$:

$$X_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^1 x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Eftersom de komplexa fourierseriekoefficienterna ges av

$$c_n = \int_0^1 x(t) e^{-j2\pi n t} dt$$

får vi $c_n = X_0(2\pi n)$. För att beräkna $X_0(\omega)$, observera att

$$X_0(0) = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \right] dt = \frac{1}{6}.$$

Alltså får vi

$$c_0 = X_0(0) = \frac{1}{6}.$$

För $\omega \ne 0$, observera att $-j\omega^3 X_0(\omega)$ är fouriertransformen av $x_0'''(t)$. Å andra sidan är (notera att eftersom $x_0(0) = x_0(1) = 0$ så är x_0 kontinuerlig)

$$x_0'(t) = \begin{cases} -2t + 1 & \text{om } \ 0 < t < 1 \\ 0 & \text{om } \ t < 0 \ \text{ eller } \ t > 1. \end{cases}$$

Vi ser att x_0' har språngdiskontinuiteter av storlek 1 i $t = 0$ och i $t = 1$. Alltså blir

$$x_0''(t) = \begin{cases} -2 & \text{om } \ 0 < t < 1 \\ 0 & \text{om } \ t < 0 \ \text{ eller } \ t > 1 \end{cases} + \delta(t) + \delta(t-1).$$

En sista derivering ger

$$x_0'''(t) = -2\delta(t) + 2\delta(t-1) + \delta'(t) + \delta'(t-1).$$

Vi får

$$-j\omega^3 X_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0'''(t) e^{-j\omega t} dt = -2 + 2e^{-j\omega} + j\omega + j\omega e^{-j\omega}.$$

Eftersom $e^{-j2\pi n} = 1$ får vi då

$$-j(2\pi n)^3 X_0(2\pi n) = -2 + 2 + j \cdot (2\pi n) + j \cdot (2\pi n) = 2j \cdot (2\pi n),$$

varav, för $n \ne 0$,

$$c_n = X_0(2\pi n) = -\frac{2}{(2\pi n)^2} = -\frac{1}{2\pi^2 n^2}.$$

De reella fourierseriekoefficienterna ges nu av

$$a_n = 2\mathrm{Re} c_n, \quad b_n = -2\mathrm{Im} c_n.$$

Vi får alltså $a_0 = 1/3$ samt

$$a_n = -\frac{1}{\pi^2 n^2}, \quad b_n = 0$$

för $n \geq 1$.
Svar: $b_n = 0$, $a_0 = 1/3$ och

$$a_n = -\frac{1}{\pi^2 n^2}$$

för $n \geq 1$. Notera att summan i högerledet av (4) konvergerar till $x(t)$ för alla t.

5 a. Låt v vara ett fritt fallande kropps hastighet nedåt i vertikal led. Om kroppens massa är m, tyngdaccelerationen är g och luftmotståndet ges av kv^2 för en konstant k, så gäller att

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Efter en omskalning av v och tidsvariabeln kan man anta att $g = 1$ och $k/m = 1$. Då får vi ekvationen

$$\frac{dv}{dt} = 1 - v^2. \tag{5}$$

Lös (5) under förutsättning att kroppen är i vila vid $t = 0$, d.v.s. $v(0) = 0$.

Lösning: Ekvationen är separabel och vi får

$$\frac{1}{1-v^2}\frac{dv}{dt} = 1.$$

Om vi integrerar denna likhet från 0 till t och använder oss av att $v(0) = 0$ får vi

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t 1dt = \int_0^t \frac{1}{1-v^2}\frac{dv}{dt}dt = \{\text{variabelbyte, } v(0) = 0\} \\ &= \int_0^{v(t)} \frac{1}{1-v^2}dv = \int_0^{v(t)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v}\right)dv \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1-v) + \frac{1}{2}\ln(1+v) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}. \end{aligned}$$

Om vi exponentierar denna likhet får vi

$$\frac{1+v}{1-v} = e^{2t},$$

varav

$$1 + v = e^{2t} - ve^{2t} \Longleftrightarrow v + ve^{2t} = e^{2t} - 1 \Longleftrightarrow v = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}.$$

Man bör nu kontrollera att detta stämmer.
Svar:

$$v(t) = \frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}.$$

5 b. Beräkna gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Vad har detta gränsvärde för tolkning?

Lösning: Då $t \to \infty$ har vi $e^{-2t} \to 0$. Följdaktligen får vi

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 1.$$

Vi konstaterar att hastigheten konvergerar mot ett ändligt värde, vilket vi kan tolka som en "sluthastighet".

6 Låt x vara en reellvärd funktion (signal) på ett intervall $[0, nT]$, där n är ett positivt heltal och $T > 0$. Vi vill approximera x med en funktion x_{approx} på intervallet så att

$$x_{\text{approx}}(t) = \begin{cases} a_1 & \text{om} \quad 0 \le t \le T \\ a_2 & \text{om} \quad T < t \le 2T \\ \vdots & \vdots \\ a_n & \text{om} \quad (n-1)T < t \le nT, \end{cases}$$

där a_1, a_2,..., a_n är reella tal. Hur skall vi välja a_1, a_2,..., a_n så att energin av differensen $x - x_{\text{approx}}$, d.v.s.

$$\int_0^{nT} |x(t) - x_{\text{approx}}(t)|^2 dt,$$

blir så liten som möjligt?

Lösning, alternativ 1: Låt

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad 0 \le t \le T \\ 0 & \text{om} \quad t < 0 \quad \text{eller} \quad t > T \end{cases}$$

samt

$$\phi_m(t) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad (m-1)T < t \le mT \\ 0 & \text{om} \quad t \le (m-1)T \quad \text{eller} \quad t > mT \end{cases}$$

för $m = 2, ..., n$. Då kan vi skriva

$$x_{\text{approx}}(t) = \sum_{m=1}^{n} a_m \phi_m(t).$$

Definiera

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^{nT} x(t)\phi_m(t)dt = \frac{1}{T} \int_{(m-1)T}^{mT} x(t)dt.$$

Observera att

$$\int_0^{nT} x(t)x_{\text{approx}}(t)dt = \sum_{m=1}^{n} a_m \int_0^{nT} x(t)\phi_m(t)dt = T \sum_{m=1}^{n} a_m c_m.$$

Vidare har vi

$$\int_0^{nT} x_{\text{approx}}^2(t)dt = \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_m a_j \int_0^{nT} \phi_m(t)\phi_j(t)dt = T \sum_{m=1}^{n} a_m^2.$$

Vi får

$$\begin{aligned} \int_0^{nT} |x(t) - x_{\text{approx}}(t)|^2 dt &= \int_0^{nT} [x(t) - x_{\text{approx}}(t)][x(t) - x_{\text{approx}}(t)]dt \\ &= \int_0^{nT} x^2(t)dt - 2\int_0^{nT} x(t)x_{\text{approx}}(t)dt \\ &\quad + \int_0^{nT} x_{\text{approx}}^2(t)dt. \end{aligned}$$

Med hjälp av ovanstående formler får vi då

$$\int_0^{nT} |x(t) - x_{\text{approx}}(t)|^2 dt = \int_0^{nT} x^2(t)dt - 2T \sum_{m=1}^{n} a_m c_m + T \sum_{m=1}^{n} a_m^2.$$

Eftersom

$$-2a_m c_m + a_m^2 = (a_m - c_m)^2 - c_m^2$$

får vi

$$\int_0^{nT} |x(t) - x_{\text{approx}}(t)|^2 dt = \int_0^{nT} x^2(t)dt - T\sum_{m=1}^{n} c_m^2 + T\sum_{m=1}^{n}(a_m - c_m)^2.$$

Vi vill välja a_m så att vänsterledet blir så litet som möjligt. Eftersom den enda termen i högerledet som beror av a_m är den sista och eftersom denna term är icke-negativ får vi minimum då

$$T\sum_{m=1}^{n}(a_m - c_m)^2 = 0,$$

d.v.s. då $a_m = c_m$.
Svar:

$$a_m = \frac{1}{T}\int_{(m-1)T}^{mT} x(t)dt.$$

Lösning, alternativ 2: Notera att

$$\int_0^{nT} |x(t) - x_{\text{approx}}(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)T}^{kT} |x(t) - a_k|^2 dt.$$

Vi har n termer i summan och de är oberoende av varandra (varje term beror bara på ett a_k). Att minimera summan är därmed samma sak som att minimera varje term för sig. Term k ges av

$$\begin{aligned}
f_k(a_k) &= \int_{(k-1)T}^{kT} |x(t) - a_k|^2 dt \\
&= \int_{(k-1)T}^{kT} x(t)^2 dt - 2\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)a_k dt + \int_{(k-1)T}^{kT} a_k^2 dt \\
&= \int_{(k-1)T}^{kT} x(t)^2 dt - 2a_k\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt + Ta_k^2.
\end{aligned}$$

Om vi deriverar f_k med avseende på a_k får vi

$$f'(a_k) = -2\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt + 2Ta_k.$$

Vi ser att om

$$a_k < \frac{1}{T}\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt$$

så är $f'(a_k) < 0$, d.v.s. f_k minskar, och om

$$a_k > \frac{1}{T}\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt$$

så är $f'(a_k) > 0$, d.v.s. f_k ökar. Med andra ord är

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt$$

ett globalt minimum.

Svar:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt$$