Tentamen 5B1209/1215:2, Signaler och system I för E, IT och ME, 061214, kl. 14.00-19.00.

Hjälpmedel: Zill-Cullen; Differential equations with Boundary-Value Problems, utdelat arbetsmaterial, β Mathematics Handbook, kursens formelsamlingar samt räknedosa. För dem som läst kursen senast VT05 dessutom Oppenheim-Willsky: Signals and Systems, Hjalmarsson: Kompletterande kursmaterial för Signaler och System I.

Betyg: För betyget 3 krävs (inklusive bonus) minst 24p, för betyget 4 minst 32p och för betyget 5 minst 40p. 20-23p berättigar till en kompletterande tentamen. *OBS! För full poäng krävs en fullständing motivering.*

Den som läst kursen senast VT 2005 ersätter uppgift 2 med uppgift 2^+.

1. a. Finn allmänna lösningen till ekvationen (5p)

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = 1.$$

b. Finn lösningen som uppfyller $y(0) = 0$. (1p)

2. Antag att vi har ett linjärt system som fungerar så att om signalen vi skickar in är $x_{in}(t)$ för $t \geq 0$ så är signalen som kommer ut, säg $x_{ut}(t)$, given av

$$x_{ut}(t) = \int_0^t h(t-\tau)x_{in}(\tau)d\tau \tag{1}$$

för en funktion $h(t)$, $t \geq 0$. Funktionen $h(t)$ är inte given, men vi vet att om $x_{in}(t) = e^{-t}$, så är $x_{ut}(t) = \sin t$.

a. Beräkna Laplacetransformen av $h(t)$. (3p)

b. Givet att $x_{in}(t) = e^{-2t}$, beräkna $x_{ut}(t)$ given av (1). (5p)

2^+. Bestäm den tidsdiskreta fouriertransformen ("TDFT:n") till signalen $h[n] = 3^{-|n-1|} + 3^{-|n+1|}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. (8p)

3. Lös ekvationen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - \sin t \\ \frac{dy}{dt} &= x + \cos t, \end{aligned}$$

med begynnelsevärden givna av $x(0) = 1$ och $y(0) = 1$. (10p)

4. Låt $x(t)$ vara en 1-periodisk funktion given av

$$x(t) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

då $0 \leq t \leq 1$. Beräkna de reella talen a_n för $n \geq 0$ och b_n för $n \geq 1$ sådana att (10p)

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n t) + b_n \sin(2\pi n t)].$$

5. Låt v vara ett fritt fallande kropps hastighet nedåt i vertikal led. Om kroppens massa är m, tyngdaccelerationen är g och luftmotståndet ges av kv^2 för en konstant k, så gäller att

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Efter en omskalning av v och tidsvariabeln kan man anta att $g = 1$ och $k/m = 1$. Då får vi ekvationen

$$\frac{dv}{dt} = 1 - v^2. \qquad (2)$$

a. Lös (2) under förutsättning att kroppen är i vila vid $t = 0$, d.v.s. $v(0) = 0$ (du får utgå ifrån att lösningen aldrig lämnar intervallet $-1 < v < 1$). (6p)

b. Beräkna gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Vad har detta gränsvärde för tolkning? (2p)

6. Låt x vara en reellvärd funktion (signal) på ett intervall $[0, nT]$, där n är ett positivt heltal och $T > 0$. Vi vill approximera x med en funktion x_{approx} på intervallet så att

$$x_{\text{approx}}(t) = \begin{cases} a_1 & \text{om } \ 0 \leq t \leq T \\ a_2 & \text{om } \ T < t \leq 2T \\ \vdots & \vdots \\ a_n & \text{om } \ (n-1)T < t \leq nT, \end{cases}$$

där a_1, a_2,..., a_n är reella tal. Hur skall vi välja a_1, a_2,..., a_n så att energin av differensen $x - x_{\text{approx}}$, d.v.s.

$$\int_0^{nT} |x(t) - x_{\text{approx}}(t)|^2 dt,$$

blir så liten som möjligt? (8p)