Lösningar till tenta för 5B1209/5B1215:2, 070605

(1.) Generellt gäller $x_{ut}(t) = h(t) * x_{in}(t)$, dvs. efter fouriertransformering $X_{ut}(\omega) = H(\omega) \cdot X_{in}(\omega)$

I detta fall: $e^{-|t|} \xrightarrow{FT} \frac{2}{1+\omega^2}$,

$$e^{-2|t|} \xrightarrow{FT} \frac{4}{4+\omega^2}$$

$$e^{-2|t-1|} \xrightarrow{FT} \frac{4}{4+\omega^2} e^{-i\omega},$$

dvs. $X_{ut}(\omega) = \frac{8}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} \cdot e^{-i\omega} = \left[\begin{array}{l}\text{partialbråks-}\\ \text{uppdelning}\end{array}\right]$

$$= \left(\frac{\frac{8}{3}}{1+\omega^2} - \frac{\frac{8}{3}}{4+\omega^2}\right) e^{-i\omega} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1+\omega^2} e^{-i\omega} - \frac{2}{3} \frac{4}{4+\omega^2} e^{-i\omega}$$

Återtransformering ger nu:

$$x_{ut}(t) = \frac{4}{3} e^{-|t-1|} - \frac{2}{3} e^{-2|t-1|}$$; Svar

---

(2.) Laplacetransformering, med hänsyn tagen till att $i(0)=0$, ger

$$L \cdot s I(s) + R I(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = \mathcal{L}(E)(s).$$

Man har $\sin t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2+1}$ varav

$$E(t) = \mathcal{U}(t-1)\sin(t-1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^{-s}}{s^2+1}$$

I uppgift a. får man därför:

$$\left(s + \frac{1}{s}\right) I(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+1} \iff I(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} e^{-s}$$

Enligt tabell är $\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t \sin kt$. I vårt fall, med $k=1$,

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2} t \sin t \text{ varav } \frac{s}{(s^2+1)^2} e^{-s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2}(t-1)\sin(t-1) \cdot \mathcal{U}(t-1)$$

Svar a: $i(t) = \mathcal{U}(t-1) \cdot \frac{1}{2}(t-1)\sin(t-1)$

(Alternativt kan man utnyttja den allmänna regeln

$$t\,f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -F'(s) \text{ dvs } F'(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -t\,f(t)$$

I vårt fall $\frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin t$, derivera V.L.

$$-\frac{2s}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -t\sin t \Rightarrow \frac{s}{s^2+1} \rightarrow \frac{t}{2}\sin t \quad)$$

I uppgift b får man istället:

$$\left(s+1+\frac{1}{s}\right)I(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow e^{s} I(s) = \frac{s}{(s^2+s+1)(s^2+1)} = \left[\begin{matrix}\text{partialbråks-}\\\text{uppdelning}\end{matrix}\right] = \frac{As+B}{s^2+s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

Identifiering ger här:

$$(As+B)(s^2+1) + (s^2+s+1)(Cs+D) = s$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ B+C+D=0 \\ A+C+D=1 \\ B+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A=0 \\ B=-1 \\ C=0 \\ D=1 \end{matrix}$$

Alltså $e^{s} I(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ (tabell)

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin t - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t, \text{ varav}$$

Svar b: $i(t) = \left(\sin(t-1) - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-(t-1)/2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right) \cdot \mathcal{U}(t-1)$

(2⁺)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} = \sum_{n=2}^{\infty} 4^{-(n+2)} e^{-jn\omega} = \left[n = m+2\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} 4^{-(m+4)} e^{-j(m+2)\omega} = 4^{-4} \cdot e^{-2j\omega} \sum_{m=0}^{\infty} 4^{-m} e^{-jm\omega} =$$

$$= 4^{-4} e^{-2j\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-j\omega}}{4}\right)^m = \left[\begin{matrix}\text{Geometrisk serie med kvot}\\ e^{-j\omega}/4\text{, vars belopp} = 1/4 < 1\end{matrix}\right] =$$

$$= 4^{-4} e^{-2j\omega} \frac{1}{1-e^{-j\omega}/4} = \frac{e^{-2j\omega}}{64(4-e^{-j\omega})} \text{ ; Svar}$$

3. Variant I: (Egenvärdesmetoden)

Vi löser först motsvarande homogena system

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \bar{x}. \qquad (H)$$

Egenvärdena till systemmatrisen erhålls ur:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7 \Leftrightarrow \lambda = -1,\ 7.$$

Motsvarande egenvektorer:

$$\lambda = -1: \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 7: \quad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 5v_1 - 3v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen till systemet (H) är därför:

$$\bar{x}_H = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{7t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{7t} \\ -e^{-t} & 5e^{7t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.

Med tanke på att den allmänna lösningen till det givna systemet har formen $\bar{x} = \bar{x}_p + \bar{x}_H$ där $\bar{x}_p$ är någon partikulärlösning till det inhomogena systemet och termen $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ är konstant söker vi upp en konstantlösning $\bar{x}_p = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Insatt i systemet ger detta

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Den allmänna lösningen till det inhomogena systemet är alltså

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{7t} \\ -e^{-t} & 5e^{7t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

(3a. forts) Begynnesevillkoret $\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Svar: $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{7t}$

Variant 2 (Laplacetransformering):

$$s\bar{X}(s) - \bar{0} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\bar{X}(s) + \frac{1}{s}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} s-2 & -3 \\ -5 & s-4 \end{pmatrix}\bar{X}(s) = \frac{1}{s}\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\bar{X}(s) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s-4 & 3 \\ 5 & s-2 \end{pmatrix}\cdot\left(\frac{1}{s}\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}\right); \text{ där } \Delta = (s-2)(s-4)-15 = s^2-6s-7 = (s+1)(s-7)$$

dvs. $\bar{X}(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s-7)}\begin{pmatrix} 5s+7 \\ 9s+7 \end{pmatrix}$

Före återtransformering partialbråksuppdelas uttrycken:

$$\frac{5s+7}{s(s+1)(s-7)} = \frac{-1}{s} + \frac{\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{3}{4}}{s-7} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -1 + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{7t}$$

$$\frac{9s+7}{s(s+1)(s-7)} = \frac{-1}{s} + \frac{-\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{5}{4}}{s-7} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -1 - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{5}{4}e^{7t}$$

Svar som ovan

(3b.) $\frac{d}{dt}(A\bar{x}) = \bar{0} \Longleftrightarrow A\bar{x} = \bar{c}$ (konstant godt. 2-vektor). Om dessutom $\det A \neq 0$ så är A inverterbar, dvs. $\bar{x} = A^{-1}\bar{c}$. Å andra sidan kan den allmänna lösningen till det givna systemet skrivas $\bar{x} = \Phi\bar{c}$, där Φ är en fundamentalmatris (som sådan är då $\det\Phi \neq 0$) och $\bar{c}$ en godtycklig 2-vektor. Som A duger därför Φ^{-1}, där Φ är någon fundamentalmatris. Enl. a-uppg. är $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{7t} \\ -e^{-t} & 5e^{7t} \end{pmatrix}$ en sådan, varav

Svar: $A = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{7t} \\ -e^{-t} & 5e^{7t} \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{e^{-6t}}{8}\begin{pmatrix} 5e^{7t} & -3e^{7t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$

(4.) a. Differensen mellan två partikulära lösningar är alltid en lösning till motsvarande homogena ekvation. Så är t.ex. $y_2 - y_1 = x^3$ och $y_3 - y_1 = x^4$ lösningar till

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0 \quad (H)$$

Eftersom x^3 och x^4 är linjärt oberoende (x^3 kan inte vara någon konstant multipel av x^4) och (H) är av ordning 2, så är dess allmänna lösning

$$y_H = Ax^3 + Bx^4 \quad (A \text{ och } B \text{ konstanter})$$

Den givna inhomogena ekvationen har därmed den allmänna lösningen

$$y = y_1 + y_H = x^2 + Ax^3 + Bx^4$$: Svar a

---

b. Enligt svaret i a så är $y(0) = 0$ för alla lösningar till ekvationen. Det finns alltså inga lösningar till begynnelsevillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Villkoren $y(1) = 1$ och $y'(1) = 0$ är ekvivalenta med att

$$\begin{cases} A + B + 1 = 1 \\ 3A + 4B + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \end{cases}$$

Svar b: Inga lösningar i det första fallet, lösningen $y = x^2 + 2x^3 - 2x^4$ i det andra.

---

c. Existenssatsen utsäger att det finns en och endast en lösning till ekvationen

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad y(x_0) = C, \quad y'(x_0) = D$$

om $a(x)$, $b(x)$ och $f(x)$ är kontinuerliga i någon omgivning till x_0. För att kunna tillämpas på vårt fall måste ekvationen skrivas på formen

(4 forts)

$$y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2} = 2.$$

Här ser man att t.ex $a(x) = -\frac{6}{x}$ inte är kontinuerlig i någon omgivning av $x_0 = 0$. Satsen garanterar inte att det finns någon lösning, vilket stämmer med resultatet i b.

Däremot är $a(x) = -\frac{6}{x}$, $b(x) = \frac{12}{x^2}$ och $f(x) = 2$ kontinuerliga i omgivningen $0 < x$ till $x_0 = 1$, så enligt existenssatsen så måste det finnas en (och endast en) lösning åtminstone i det intervallet, vilket också stämmer med resultatet i b-uppgiften.

(5.) a. Variant I (Direkt beräkning)

Serien är 2π-periodisk (eftersom alla dess termer $c_n e^{jnt}$ är det). Koefficienterna erhålls ur

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} s(t) e^{-jnt}\,dt = \int_{-\pi}^{0} (1-\cos 2t)\cdot e^{-jnt}\,dt + \int_{0}^{\pi} (\cos 2t)\, e^{-jnt}\,dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Subst } t \to t+\pi \\ \text{i den första integralen}\end{array}\right] = \int_0^{\pi} -\underbrace{\cos 2(t+\pi)}_{\cos 2t}\, e^{-jnt}\cdot \underbrace{e^{-jn\pi}}_{(-1)^n}\,dt + \int_0^{\pi} \cos 2t \cdot e^{-jnt}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} (1-(-1)^n)\cos 2t\, e^{-jnt}\,dt = \begin{cases} 0, & \text{om } n \text{ jämnt} \\ 2\int_0^{\pi} \frac{e^{2jt}+e^{-2jt}}{2}\, e^{-jnt}\,dt, & \text{om } n \text{ udda.}\end{cases}$$

Vidare är för udda n:

$$\int_0^{\pi} (e^{2jt}+e^{-2jt}) e^{-jnt}\,dt = \int_0^{\pi} \left(e^{(2-n)jt} + e^{-(2+n)jt}\right)dt =$$

$$= \left[\frac{e^{(2-n)jt}}{\underbrace{(2-n)j}_{\neq 0 \text{ ty } n \text{ udda}}} + \frac{e^{-(2+n)jt}}{-(2+n)j}\right]_0^{\pi} = \left|\begin{array}{l} e^{nj\pi} = \\ = e^{-nj\pi} = \\ = -1 \text{ om} \\ n \text{ udda}\end{array}\right| = -\frac{2}{j}\left(\frac{1}{2-n} - \frac{1}{2+n}\right) =$$

$$= -\frac{2}{j}\cdot\frac{2n}{4-n^2}. \text{ Alltså } c_n = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{om } n \text{ jämnt} \\ -\frac{2n}{\pi j(4-n^2)}, & \text{om } n \text{ udda}\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{(1-(-1)^n)\cdot nj}{\pi(4-n^2)} \text{ (om } n \neq \pm 2, \text{ 0 annars)}$$

Den reella fourierserien har formen

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

där $a_n = 2\operatorname{Re} c_n = 0$ och $b_n = -2\operatorname{Im} c_n = \frac{4n}{\pi(n^2-4)}$ om n udda

och $=0$ om n jämnt:

<u>Svar:</u> $s(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{2nj}{\pi(4-n^2)} e^{jnt} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{4n}{\pi(n^2-4)} \sin nt$

<u>Variant II</u> (Användning av fourierteori)

Serien $s(t)$ är den 2π-periodiska fortsättningen av

$$x(t) = \begin{cases} \cos 2t & 0 < t < \pi \\ -\cos 2t & -\pi < t < 0 \\ 0 & |t| > \pi \end{cases}$$

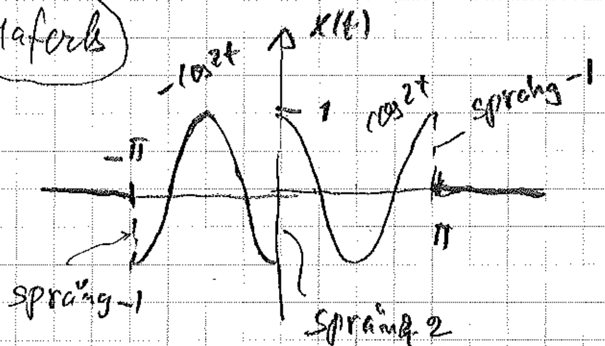
De sökta c_n-koefficienterna kan därför bestämmas ur

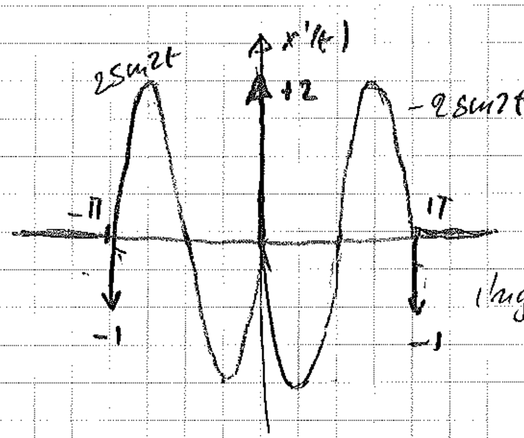
$$c_n = \frac{1}{2\pi} X\left(\frac{2\pi n}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} X(n)$$

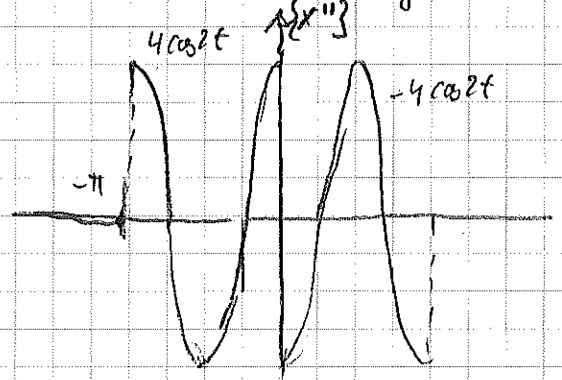
där $X(\omega)$ är fouriertransformen till $x(t)$: Vi bestämmer $X(\omega)$ genom att utnyttja att den generaliserade andraderivatan x'', så när som på δ-pulser, är $=-4x(t)$

Vi reder först ut detta

4a forts.







$$x'(t) = \left\{\begin{array}{ll} -2\sin 2t & 0<t<\pi \\ 2\sin 2t & -\pi<t<0 \\ 0 & |t|>\pi \end{array}\right\} +$$

$$+ 2\delta(t) - \delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)$$

$$x''(t) = \left\{\begin{array}{ll} -4\cos 2t & 0<t<\pi \\ 4\cos 2t & -\pi<t<0 \\ 0 & |t|>\pi \end{array}\right\} +$$

$$+ 2\delta'(t) - \delta'(t+\pi) - \delta'(t-\pi) = -4x(t) + 2\delta'(t) - \delta'(t+\pi) - \delta'(t+\pi)$$

Fouriertransformeras detta får man eftersom

$$\delta(t-a) \xrightarrow{FT} e^{-jaω}$$

$$\delta'(t-a) \xrightarrow{FT} jω e^{-jaω}$$

$$(-ω^2+4)\,X(ω) = jω\left(2 - e^{jω\pi} - e^{-jω\pi}\right) = jω\cdot 2\,(1-\cos ω\pi)$$

varav $X(ω) = \dfrac{2jω(1-\cos ω\pi)}{4-ω^2}$

(För $ω = \pm 2$ får man enligt $X(\pm 2) = \lim\limits_{ω\to\pm 2} X(ω) = [\text{l'Hospital}] =$

$= \lim\limits_{ω\to\pm 2} \dfrac{2j(1-\cos ω\pi) + 2jω\cdot\pi\sin ω\pi}{-2ω} = 0$)

Detta ger nu att $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{2jn(1-\cos n\pi)}{4-n^2} = \dfrac{jn(1-(-1)^n)}{\pi(4-n^2)}$, $n \neq \pm 2$

och $c_{\pm 2} = 0$

<u>Svar</u> som ovan

(4b.) $s(t)$ är 2π-periodisk, varför

$s\left(\frac{3\pi}{2}\right) = s\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right) = s\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \text{ ligger i} \\ \text{intervallet } -\pi<t<\pi \end{array}\right] =$

$= \text{sign}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2\cdot\frac{\pi}{2} = (-1)^2 = 1$! <u>Svar b.</u>

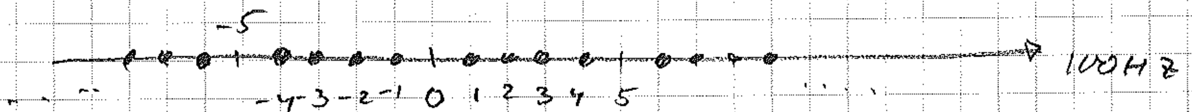
(6) a. Man har att

$$X(f) = 7\cdot\frac{1}{2}\left(\delta(f+300)+\delta(f-300)\right) + 9\cdot\frac{j}{2}\left(\delta(f+400)-\delta(f-400)\right)\cdot e^{-17{,}5jf/400}$$

Frekvensinnehållet för $X(f)$ är därför ± 300 och ± 400 Hz

Sampling av $x(t)$ med sampelfrekvensen f_s ger en signal vars frekvensinnehåll är den f_s-periodiska fortsättningen till X:s frekvensinnehåll. Om $f_s = 500$Hz så får man frekvensinnehållet

$\pm 300 + n500$ och $\pm 400 + n500$ (n heltal):



Vid applicering av lågpassfiltret kapas alla frekvenser utanför intervallet $-500 < f < 500$.
Återstår frekvenserna $\pm 100, \pm 200, \pm 300$ och ± 400 Hz

<u>Svar a</u>: $\{\pm 100, \pm 200, \pm 300, \pm 400\}$ Hz

---

(6) b. Då $x(t)$ samplas med sampelfrekvens f_s får man en signal vars fouriertransform är $f_s \cdot$ (f_s-periodiska fortsättningen av $X(f)$). Enligt uträkningen i a-uppgiftens lösning får den filtrerade signalen då fouriertransformen

$$\frac{1}{500}Y(f) = 7\cdot\frac{1}{2}\left(\delta(f+300)+\delta(f-300)\right) + 9\cdot\frac{j}{2}\left(\delta(f+400)\cdot e^{+17{,}5j} - \delta(f-400)\, e^{-17{,}5j}\right) + 7\cdot\frac{1}{2}\left(\delta(f-200)+\delta(f+200)\right) + 9\cdot\frac{j}{2}\left(\delta(f-100)\, e^{17{,}5j} - \delta(f+100)\, e^{-17{,}5j}\right)$$

(4b forts)

Återtransformering ger

$$\frac{1}{500}\,y(t) = 7\cos(600\pi t) + 9\sin(800\pi t - 17{,}5) + 7\cos(400\pi t) + \frac{9j}{2}\left(e^{200\pi jt}\cdot e^{17{,}5j} - e^{-200\pi jt}\cdot e^{-17{,}5j}\right)$$

$$= 7\cos(600\pi t) + 9\sin(800\pi t - 17{,}5) + 7\cos(400\pi t) - 9\sin(200\pi t - 17{,}5)\,;$$

Svar b: $y(t) =$

$$= 500\cdot\left\{7\left(\cos(600\pi t) + \cos(400\pi t)\right) + 9\left(\sin(800\pi t - 17{,}5) - \sin(200\pi t - 17{,}5)\right)\right\}$$

(6c) För att $y(t) = k\,x(t)$, dvs. $Y(f) = k\,X(f)$, så måste $y(t)$ och $x(t)$ ha samma frekvensinnehåll. Detta innebär att alla bidragen till den f_s-periodiska fortsättningen till $X(f)$ måste ligga utanför 500 Hz-bandet, dvs. f_s måste väljas så att

$-400 + f_s > 500$, $-300 + f_s > 500$, $400 - f_s < -500$ och

$300 - f_s < -500$, dvs. $f_s > 900$.

För dessa f_s-värden så gäller då att

$$Y(f) = f_s \cdot X(f),\quad \text{dvs.}\quad y(t) = f_s \cdot x(t)$$

Svar: $f_s > 900$ Hz
