Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen, 5B1209/5B1215:2, Signaler och system I, för E, ME och IT, den 5 juni 2007, kl 14.00 – 19.00

Hjälpmedel: Zill-Cullen; Differential Equations with Boundary-Value Problems, Utdelat arbetsmaterial, β Mathematics Handbook, kursens formelsamlingar, räknedosa.

För dem som läst kursen senast VT05 dessutom Oppenheim-Willsky: Signals and systems, Hjalmarsson: Kompletterande kursmaterial för Signaler och system I.

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 24p, för betyget 4 minst 32p och för betyget 5 minst 40p. 20 – 23p berättigar till en kompletterande tentamen.

Den som läst kursen senast VT 2005 får ersätta uppgift 2 med uppgift 2^+.

1. Ett LTI-system har pulssvar

$$h(t) = e^{-|t|}.$$

Om en signal $x_{\text{in}}(t) = e^{-2|t-1|}$ skickas in i systemet, vilken blir då utsignalen $x_{\text{ut}}(t)$? (6p)

2. Om man applicerar en spänning $E(t)$ på en elektrisk krets bestående av en resistans, en kapacitans och en induktans kopplade i serie, så uppfyller strömmen $i(t)$ ekvationen

$$L\frac{di}{dt} + R\,i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = E(t),$$

där L, R och C är parametervärdena för induktansen, resistansen respektive kapacitansen. Antag att $L = C = 1$ och att

$$E(t) = \mathcal{U}(t-1)\sin(t-1),$$

där $\mathcal{U}$ är Heavisides funktion ("the unit step function"). Beräkna $i(t)$ om

a. $R = 0$ och $i(0) = 0$, (2p)
b. $R = 1$ och $i(0) = 0$. (4p)

2^+. *(Räknas endast av dem som läst kursen VT05 eller tidigare.)*
Bestäm den tidsdiskreta fouriertransformen (”TDFT:n”) till sekvensen

$$x[n] = 4^{-(n+2)},\ \text{då } n \geq 2 \text{ och } = 0,\ \text{då } n < 2.$$ (6p)

3. a. Lös systemet av differentialekvationer

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix},\ \text{då } \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (5p)

b. Finn en matrisvärd funktion $\boldsymbol{A}(t)$ sådan, att

$$\det(\boldsymbol{A}(t)) \neq 0$$

och

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0},$$

för alla lösningar $\boldsymbol{x}(t)$ till

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$$ (3p)

Var god vänd!

4. Man får veta att ekvationen $x^2 y'' - 6x y' + 12 y = 2x^2$

bland sina lösningar har de tre funktionerna

$$y_1 = x^2, y_2 = x^2 + x^3 \text{ och } y_3 = x^2 + x^4.$$

a. Bestäm ekvationens allmänna lösning. (4p)

b. Finns det några lösningar som uppfyller begynnelsevillkoren

$$y(0) = 1, y'(0) = 0, \text{ resp.}$$
$$y(1) = 1, y'(1) = 0?$$ (2p)

c. Hur rimmar svaren i b-uppgiften med satsen om existens av lösningar till begynnelse-värdesproblem? (2p)

Motivera noga Dina svar.

5. Man vet om serien

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt}, -\infty < t < \infty,$$

att den för t i intervallet $-\pi < t < \pi$ är $= (\operatorname{sign} t) \cdot \cos 2t$.

a. Bestäm koefficienterna c_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ samt även den reella fourierutvecklingen av $s(t)$. (8p)

b. Beräkna exakt $s(3\pi/2)$. (2p)

Svaren får inte innehålla några integraler eller serier.

(*Anmärkning*: Uppgiften b. kan lösas även om man inte löst a-uppgiften.)

6. Signalen

$$x(t) = 7 \cos 600\pi t + 9 \sin (800\pi t - 17{,}5),\ t \text{ mätt i sekunder,}$$

samplas med en sampelfrekvens på f_s Hz. Den samplade signalen bearbetas med ett idealt låg-passfilter som släpper igenom alla frekvenser upp till och med nivån 500 Hz ograverade, medan alla frekvenser över denna nivå inte släpps igenom alls. Den resulterande signalen kallar vi $y(t)$.

a. Om $f_s = 500$, vilket är då frekvensinnehållet i signalen $y(t)$?
(Med frekvensinnehållet till en signal $y(t)$ menas mängden av frekvenser f för vilka signalens fouriertransform $Y(f) \neq 0$.) (3p)

b. Bestäm $y(t)$ då $f_s = 500$. (5p)

c. För vilka värden på samplingsfrekvensen f_s är $y(t)$ proportionell mot $x(t)$, dvs. $y(t) = k \cdot x(t)$ för någon konstant k? (2p)

Svaren får inte innehålla integraler eller serier. Motivera svaren noga.

Lycka till!