KTH Matematik

Lösningsförslag tenta SF1635(/5B1209), Signaler och system I, 21 oktober 2008

1. Vi söker $x(t)$ och $y(t)$ som uppfyller $\begin{cases} x' = 8x - 10y \\ y' = 5x - 7y \end{cases}$ och $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

Lösning: Alternativ 1, med egenvektorer etc.

Låt $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Då blir ekvationerna $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{A}$:s egenvärden: $0 = \det(\lambda I - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & 10 \\ -5 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$, så $\lambda_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$.

Egenvektor till $\lambda_1 = 3$: $\left(\begin{array}{cc|c} -5 & 10 & 0 \\ -5 & 10 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Egenvektor till $\lambda_2 = -2$: $\left(\begin{array}{cc|c} -10 & 10 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ekvationssystemets allmänna lösning: $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{k}_2 = c_1 e^{3t}\mathbf{k}_1 + c_2 e^{-2t}\mathbf{k}_2$.
Konstanterna c_1, c_2 bestäms av begynnelsevillkoret,
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = c_1\mathbf{k}_1 + c_2\mathbf{k}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, så $c_1 = 1$, $c_2 = -1$.

Svar: Lösningen är $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = 2e^{3t} - e^{-2t}} \\ \boldsymbol{y(t) = e^{3t} - e^{-2t}} \end{cases}$

Alternativ 2, med laplacetransform.
Om man laplacetransformerar ekvationssystemet (och använder begynnelsevillkoret) får man
$\begin{cases} sX - 1 = 8X - 10Y \\ sY - 0 = 5X - 7Y \end{cases}$, dvs $\begin{pmatrix} s-8 & 10 \\ -5 & s+7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

och $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-8 & 10 \\ -5 & s+7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{s^2 - s - 6} \begin{pmatrix} s+7 & -10 \\ 5 & s-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(s-3)(s+2)} \begin{pmatrix} s+7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Partialbråksuppdelning ger $X(s) = \frac{s+7}{(s-3)(s+2)} = \frac{2}{s-3} + \frac{-1}{s+2}$, $Y(s) = \frac{5}{(s-3)(s+2)} = \frac{1}{s-3} + \frac{-1}{s+2}$,
så **svar** som ovan.

2. Vi skall visa att $y(x) = e^{2x}$ löser ekvationen $xy'' - (4x-1)y' + (4x-2)y = 0,\ \ x > 0$ och finna den allmänna lösningen till $xy'' - (4x-1)y' + (4x-2)y = (x-1)e^x,\ \ x > 0$.

Lösning: $y(x) = e^{2x}$ ger $y' = 2e^{2x}$ och $y'' = 4e^{2x}$. Insättning i den homogena ekvationen ger VL$= (4x - 2(4x-1) + (4x-2))e^{2x} = 0 =$HL. Så **a. är klart**.
För att lösa den inhomogena ekvationen sätter vi (”reduktion av ordningen”) $y(x) = z(x)e^{2x}$. Då blir $y' = (z' + 2z)e^{2x}$, $y'' = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x}$ och insättning i ekvationen ger $(x(z'' + 4z' + 4z) - (4x-1)(z' + 2z) + (4x-2)z)e^{2x} = (x-1)e^x$, dvs $xz'' + z' = (xz')' = (x-1)e^{-x}$, så $xz' = \int (x-1)e^{-x}\,dx \overset{\text{PI}}{=} (x-1)(-e^{-x}) - \int 1(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} + c_1$, c_1 en godtycklig konstant. Alltså $z' = -e^{-x} + \frac{c_1}{x}$ och (då $x > 0$) $z = e^{-x} + c_1 \ln x + c_2$, vilket ger $y(x) = z(x)e^{2x} = e^x + c_1 e^{2x}\ln x + c_2 e^{2x}$ och

Svar b.: Lösningen $\boldsymbol{y(x) = e^x + c_1 e^{2x} \ln x + c_2 e^{2x}}$, $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$ godtyckliga konstanter.

3. Ett kausalt LTI-system ger utsignalen $e^{-2t}\mathcal{U}(t)$ vid insignal $e^{-t}\mathcal{U}(t)$. Vi söker a. $H(s)$, laplacetransformen för pulssvaret $h(t)$, b. pulssvaret och c. utsignalen för insignal $e^{-2t}\mathcal{U}(t)$.
Lösning: Vi har att insignalen $x(t)\mathcal{U}(t)$ ger utsignalen $y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$ (ty $h(t) = 0$ då $t < 0$). Högerledet är en (laplace-)faltning, så för laplacetransformerna gäller $Y(s) = H(s)X(s)$ och med $X(s) = \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2}$ fås $\boldsymbol{H(s) = \frac{s+1}{s+2}}$.
$H(s) = 1 - \frac{1}{s+2}$, så inverstransformering med tabell ger $\boldsymbol{h(t) = \delta(t) - e^{-2t}\mathcal{U}(t)}$.
Insignalen $x(t) = e^{-2t}\mathcal{U}(t)$, $X(s) = \frac{1}{s+2}$ ger för utsignalen $Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$, så $\boldsymbol{y(t) = (1-t)e^{-2t}\mathcal{U}(t)}$.

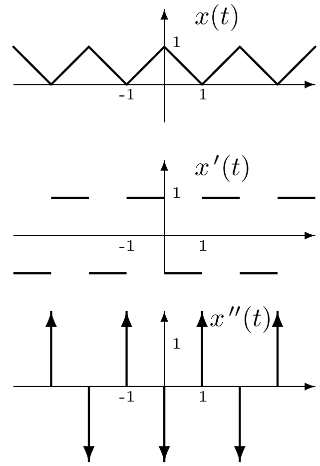
Svar: a. $\boldsymbol{H(s) = \frac{s+1}{s+2}}$, b. $\boldsymbol{h(t) = \delta(t) - e^{-2t}\mathcal{U}(t)}$, c. utsignal $\boldsymbol{(1-t)e^{-2t}\mathcal{U}(t)}$.

4. $y(t),\ t \geq 0$, uppfyller för $t \geq 0$ ekvationen $ty'(t) = \int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\,d\tau$. Vi söker a. en differentialekvation för $Y(s)$, b. alla möjliga $Y(s)$ och c. $y(t)$ då $y(0) = 2$.

Lösning: Laplacetransformation av ekvationen ger $-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'(t)\} = \mathcal{L}\{y(t) * y(t)\}$, dvs $-(sY(s) - y(0))' = Y(s)^2$, så $\boldsymbol{sY' = -Y - Y^2}$.
Ekvationen har lösningar dels $Y(s)$ kostant 0 eller -1, dels lösningar till $-\frac{1}{s} = \frac{Y'}{Y+Y^2} = (\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y+1})Y'$. Integration ger $\ln|Y| - \ln|Y+1| = -\ln|s| + C$, dvs $\ln|\frac{sY}{Y+1}| = C$, så $\frac{sY}{Y+1} = k$, konstant. Det ger (med de tidigare lösningarna) $\boldsymbol{Y(s) = \frac{k}{s-k}}$ **eller** $\boldsymbol{Y(s) = -1}$.
Motsvarande $y(t) = ke^{kt}$ respektive $y(t) = -\delta(t)$. $y(0) = 2$ ger $k = 2$, $\boldsymbol{y(t) = 2e^{2t}}$.
Svar: a. $\boldsymbol{sY' = -Y - Y^2}$**, b.** $\boldsymbol{Y(s) = \frac{k}{s-k}}$ **eller** $\boldsymbol{Y(s) = -1}$**, c.** $\boldsymbol{y(t) = 2e^{2t}}$

5. $x(t)$ är 2-periodisk och $x(t) = 1 - |t|$ då $|t| \leq 1$. Vi söker a. de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$, b. fourierserien för $x(t)$, (på komplex och reell form), c. summan

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2(s^2+n^2\pi^2)} .$$



Lösning: $x(t)$ är kontinuerlig, så $x'(t) = \{x'(t)\}$, "klassiska derivatan", $\boldsymbol{x'(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t < 1 \\ 1, & -1 < t < 0 \end{cases}}$ **och 2-periodisk**.
Sprången i $x'(t)$ ger δ-funktioner och $\{x''(t)\} = 0$:
$\boldsymbol{x''(t) = -2\delta(t) + 2\delta(t-1)}$ **och 2-periodisk**.
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t}$ ger $x''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n^2\pi^2)c_n e^{in\pi t}$, så $-n^2\pi^2 c_n = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x''(t)e^{-in\pi t}\,dt = \frac{1}{2}(-2 \cdot 1 + 2e^{-in\pi}) = -1 + (-1)^n$ (integralen tas över en period, gränserna undviker δ-funktionerna)
Så då $n \neq 0$: $c_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} = \frac{2}{n^2\pi^2}$ för udda n, 0 för jämna $n \neq 0$. $c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)\,dt = \frac{1}{2}$
Den reella serien fås ur detta, ty $e^{in\pi t} + e^{-in\pi t} = 2\cos(n\pi t)$. Det ger, med $c_n = c_{-n}$, att $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$ för udda n, 0 för jämna $n \neq 0$ och $a_0 = 1$. Alla $b_n = 0$. Serierna blir

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=\pm1,\pm3,\ldots}\frac{1}{n^2}e^{in\pi t}} \text{ och } \boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{n^2}\cos(n\pi t).}$$

Vi laplacetransformerar den reella fourierserien och den periodiska funktionen $x(t)$ för $t \geq 0$:
$\frac{1}{2s} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{s}{n^2(s^2+n^2\pi^2)} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 x(t)e^{-st}\,dt =$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\left[x(t)\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^2 + \frac{1}{s}\int_0^2 x'(t)e^{-st}\,dt\right) = \cdots = \frac{1}{s} - \frac{1}{1-e^{-2s}}\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})^2 = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}.$$

Då man löser ut den sökta summan får man

$$\boldsymbol{\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{n^2(s^2+n^2\pi^2)} = \frac{\pi^2}{4s^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}\right)\left(= \frac{\pi^2}{4s^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\tanh\frac{s}{2}\right)\right).}$$

Svar: a. $\boldsymbol{x'(t)}$ **och** $\boldsymbol{x''(t)}$**, b. serierna, c. summan enligt ovan.**

6. Funktionen $x(t) = \frac{t}{t^2-6t+13}$, $-\infty < t < \infty$ är given. Vi söker a. dess fouriertransform $X(\omega)$ och b. fouriertransformen $Y(\omega)$ (uttryckt i $X(\omega)$) till $y(t) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$ och c. skall skissa grafen för $|Y(\omega)|$ som funktion av ω då $T = \frac{1}{10}$ (fel i texten, c. rättas snällt).

Lösning: $x(t) = \frac{t}{(t-3)^2+2^2}$. Enligt tabell: $\frac{1}{t^2+2^2} \xmapsto{\mathcal{FT}} \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}$, så $\frac{1}{(t-3)^2+2^2} \xmapsto{\mathcal{FT}} \frac{\pi}{2}e^{-i3\omega-2|\omega|}$ och därur $\frac{t}{(t-3)^2+2^2} \xmapsto{\mathcal{FT}} i\frac{d}{d\omega}\frac{\pi}{2}e^{-i3\omega-2|\omega|}$, dvs $\boldsymbol{X(\omega) = \frac{i\pi}{2}e^{-i3\omega-2|\omega|}(-3i - 2\,\mathrm{sgn}(\omega))}$.
$y(t) = Tx(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$, så $Y(\omega) = \frac{T}{2\pi}X(\omega) * \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right\}$.
Men $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{T}t}$ (fourierserie för en T-periodisk funktion), så dess fouriertransform är $\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - n\frac{2\pi}{T})$ och $Y(\omega) = X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\frac{2\pi}{T})$.
Eftersom $X(\omega) * \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) = X(\omega - n\frac{2\pi}{T})$ blir det $\boldsymbol{Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\frac{2\pi}{T})}$
Grafen för $|Y(\omega)|$ är alltså (då $T = \frac{1}{10}$) den 20π-periodiska fortsättningen av $|X(\omega)| = \sqrt{13}\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}$, se fig. (Det felaktiga $T = 10$ ger den högra kurvan, (skalan ca 8,2–10,2))