KTH Matematik

Tentamen tisdagen den 21 oktober 2008 för ME, IT (m.fl.)
SF1635(/5B1209), Signaler och system I

Skrivtid: 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: BETA, kursboken (Zill-Cullen),
"Fouriermetoder för Signaler och system I",
"Högre ordnings ekvationer och system av 1:a ordningen",
"Formelsamling i Signalbehandling" (rosa), räknedosa.

Betygsgränser:

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	FX(/K)	
krävs	40	36	32	28	24	20	poäng (inklusive bonus)

Betygen 5, 4, 3, K gäller kurs 5B1209.
FX(/K) innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Tid och plats för den meddelas vid behov senare.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

1. (7p) Bestäm de funktioner $x(t)$ och $y(t)$ som uppfyller

$$\begin{cases} x' = 8x - 10y \\ y' = 5x - 7y \\ x(0) = 1, \ y(0) = 0 \end{cases}.$$

2a. (2p) Visa att $y(x) = e^{2x}$ är en lösning till differentialekvationen

$$xy'' - (4x-1)y' + (4x-2)y = 0, \quad x > 0.$$

b. (5p) Finn den allmänna lösningen till ekvationen

$$xy'' - (4x-1)y' + (4x-2)y = (x-1)e^{x}, \quad x > 0.$$

3. Ett linjärt tidsinvariant system (ett LTI-system) är sådant att insignalen $e^{-t}\mathcal{U}(t)$ ger utsignalen $e^{-2t}\mathcal{U}(t)$. Dessutom vet vi att systemet är **kausalt**, dvs insignalen $\delta(t)$ ger ett pulssvar $h(t)$ sådant att $h(t) = 0$ då $t < 0$.

a. (2p) Vad är laplacetransformen $H(s)$ för pulssvaret $h(t)$?

b. (3p) Vad är pulssvaret $h(t)$?

c. (3p) Vad blir utsignalen då insignalen är $e^{-2t}\mathcal{U}(t)$?

$\mathcal{U}(t)$ är här Heavisides stegfunktion, $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

V.g. vänd!

4. Funktionen $y(t),\ t \geq 0$, uppfyller för alla $t \geq 0$

$$ty'(t) = \int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\,d\tau.$$

a. (3p) Finn en differentialekvation som $y(t)$:s laplacetransform $Y(s)$ uppfyller.
b. (3p) Använd ekvationen för att finna alla möjliga $Y(s)$.
c. (2p) Bestäm $y(t)$ om $y(0) = 2$.

5. Låt $x(t)$ vara den 2-periodiska funktion som uppfyller $x(t) = 1 - |t|$ då $|t| \leq 1$.
a. (3p) Bestäm de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$.
b. (4p) Använd $x''(t)$ för att finna fourierserien för $x(t)$, dels på komplex form (med koefficienter $c_n,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$), dels på reell form (med koefficienter $a_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ och $b_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$).
Bestäm också c_0 och a_0, vilka inte fås ur $x''(t)$.
c. (3p) Använd resultatet i b. för att beräkna

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2(s^2 + n^2\pi^2)}$$

(som funktion av s).
I c. får man vid behov utan bevis använda att man kan integrera en uppkommen funktionsserie genom att integrera term för term.

6. Betrakta funktionen (signalen)

$$x(t) = \frac{t}{t^2 - 6t + 13}, \quad -\infty < t < \infty.$$

a. (4p) Finn $x(t)$:s fouriertransform $X(\omega)$.
b. (4p) Låt

$$y(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

vara (den normerade) T-samplade signalen och bestäm dess fouriertransform $Y(\omega)$ uttryckt i $X(\omega)$.
c. (2p) Skissa grafen för $|Y(\omega)|$ som funktion av ω i fallet $T = \frac{1}{10}$.
Uppgift b. kan lösas utan att a. har lösts.

Lycka till!
Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.