KTH Matematik

Lösningsförslag tenta SF1635(/5B1209), Signaler och system I, 20 december 2008

1. Vi söker $y(x)$ som uppfyller $xy' - 2(\ln x)\,y = \ln x$ då $x > 0$ och $y(1) = 2$.

Lösning: Ekvationen är linjär och av första ordningen, på standardform $y' - 2\frac{\ln x}{x}\,y = \frac{\ln x}{x}$ och har då en integrerande faktor $\mu(x) = e^{\int -2\frac{\ln x}{x}\,dx} = e^{-(\ln x)^2}$.
Ekvationen multiplicerad med $\mu(x)$ blir $(e^{-(\ln x)^2}y)' = e^{-(\ln x)^2}\frac{\ln x}{x} = (-\frac{1}{2}e^{-(\ln x)^2})'$, så $e^{-(\ln x)^2}y = -\frac{1}{2}e^{-(\ln x)^2} + C$. Konstanten C bestäms av att $y(1) = 2$, $e^0 y(1) = 2 = -\frac{1}{2}e^0 + C$, så $C = \frac{5}{2}$ och

Svar: Lösningen $\boldsymbol{y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{(\ln x)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}x^{\ln x}}$.

(Man kan också ”se” att $y(x) = -\frac{1}{2}$ är en partikulärlösning och bara lösa den homogena ekvationen.)

2. Vi har ekvationen $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{e^{-x}+e^{-2x}}$ och skall (a.) uttrycka den som ett första ordningens system och (b.) finna den allmänna lösningen till ekvationen.

Lösning: För att eliminera högre derivator inför vi fler okända funktioner, här $z = y'$. Då är $z' = y''$ och ekvationen motsvarar systemet $\begin{cases} y' &= z \\ z' &= -2y + 3z + \frac{1}{e^{-x}+e^{-2x}} \end{cases}$, dvs $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{e^{-x}+e^{-2x}} \end{pmatrix}$.

Svar a: $\boldsymbol{\begin{cases} y' &= z \\ z' &= -2y + 3z + \frac{1}{e^{-x}+e^{-2x}} \end{cases}}$.

Eftersom den karakteristiska ekvationen $m^2 - 3m + 2 = 0$ har rötterna $m_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ är $y_1(x) = e^x$ och $y_2(x) = e^{2x}$ två linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen $y'' - 3y' + 2y = 0$. Enligt metoden ”variation av konstanterna” ges den allmänna lösningen av $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, där $\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$, med $f(x) = \frac{1}{e^{-x}+e^{-2x}}$.
Det ger $u_1' = -e^{-x}f(x) = -\frac{1}{1+e^{-x}} = -\frac{e^x}{e^x+1}$ och $u_2' = e^{-2x}f(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$, så $u_1(x) = -\ln(e^x+1) + c_1$, $u_2(x) = -\ln(e^{-x}+1) + c_2$, $c_{1,2}$ godtyckliga konstanter.

Svar b: Lösningen är $\boldsymbol{y(x) = (c_1 - \ln(e^x+1))e^x + (c_2 - \ln(e^{-x}+1))e^{2x}}$, $\boldsymbol{c_{1,2}}$ godtyckliga konstanter

3. $x(t)$ är 4-periodisk och $x(t) = \begin{cases} t(2-t), & 0 < t \le 2 \\ 0, & -2 < t \le 0 \end{cases}$.

Vi söker (a.) de generaliserade derivatorna $x'(t)$, $x''(t)$ och $x'''(t)$ och (b.) fourierserien för $x(t)$ (på komplex och reell form) och skall (c.) visa att $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Lösning: $x(t)$ är kontinuerlig, så $x'(t) = \{x'(t)\}$, ”klassiska derivatan”,

$$\boldsymbol{x'(t) = \begin{cases} 2-2t, & 0 < t < 2 \\ 0, & -2 < t < 0 \end{cases}} \textbf{ och 4-periodisk.}$$

Sprången i $x'(t)$ ger δ-funktioner, så

$$\boldsymbol{x''(t) = \begin{cases} -2, & 0 < t < 2 \\ 0, & -2 < t < 0 \end{cases} + 2\delta(t) + 2\delta(t-2)} \textbf{ och 4-periodisk.}$$

Sprången i $x''(t)$ ger nya δ-funktioner, medan $\{x'''(t)\} = 0$, så

$\boldsymbol{x'''(t) = 2\delta'(t) + 2\delta'(t-2) - 2\delta(t) + 2\delta(t-2)}$ **och 4-periodisk.**

Svar a: $\boldsymbol{x'(t)}$, $\boldsymbol{x''(t)}$, $\boldsymbol{x'''(t)}$ är som ovan.

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{2}t}$ ger $x'''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i\frac{n^3\pi^3}{8})c_n e^{in\frac{\pi}{2}t}$, så
$(-i\frac{n^3\pi^3}{8})c_n = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} x'''(t)e^{-in\frac{\pi}{2}t}\,dt = \frac{1}{4}(-2(-in\frac{\pi}{2})e^0 - 2(-in\frac{\pi}{2})e^{in\pi} - 2e^0 + 2e^{in\pi}) = \frac{1}{4}(in\pi(1+(-1)^n) - 2(1-(-1)^n))$ (integralen tas över en period, gränserna undviker δ-funktionerna.)

Så då $n \ne 0$: $\boldsymbol{c_n = -\frac{2(1+(-1)^n)}{n^2\pi^2} + \frac{4(1-(-1)^n)}{in^3\pi^3}}$

$c_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x(t)\,dt = \ldots$, så $\boldsymbol{c_0 = \frac{1}{3}}$.

Den reella serien fås ur den komplexa, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$, så $\boldsymbol{a_0 = \frac{2}{3}}$ och då $\boldsymbol{n > 0}$: $\boldsymbol{a_n = -\frac{4(1+(-1)^n)}{n^2\pi^2}}$, $\boldsymbol{b_n = \frac{8(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}}$.

Svar b: Den komplexa fourierserien är $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{2}t}$ och den reella är $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\frac{\pi}{2}t) + b_n \sin(n\frac{\pi}{2}t))$, med a_n, b_n, c_n som ovan.

Eftersom $x(t)$ är styckvis kontinuerlig och deriverbar, konvergerar serien mot funktionen. Så $0 = x(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(0) + b_n \sin(0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=2,4,6,\ldots} \frac{2}{n^2} = \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, så $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$**, saken i c. är klar.**

4. Ett LTI-system har pulssvaret $h(t) = \operatorname{sinc} 2t - \operatorname{sinc} t$. Vi söker (a.) systemets överföringsfunktion $H(\omega)$, (b.) alla λ så att det finns en insignal $x_\lambda(t)$ (med $x_\lambda(t) \neq 0$ för något t) och med utsignal $y_\lambda(t) = \lambda x_\lambda(t)$ och (c.) exempel på sådana $x_\lambda(t)$ för alla möjliga λ.

Lösning: $H(\omega)$ är fouriertransformen av $h(t)$ och eftersom $\operatorname{sinc} t \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \operatorname{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$ får vi

Svar a: Överföringsfunktionen $\boldsymbol{H(\omega) = \frac{1}{2}\operatorname{rect}(\frac{\omega}{4\pi}) - \operatorname{rect}(\frac{\omega}{2\pi})}$.

$y_\lambda(t) = \lambda x_\lambda(t)$ är detsamma som att $Y_\lambda(\omega) = H(\omega)X_\lambda(\omega) = \lambda X_\lambda(\omega)$, så de enda möjliga värdena för λ är värden som $H(\omega)$ antar. Eftersom $\operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$ är de värdena $\frac{1}{2}$ (då $\pi < |\omega| < 2\pi$), 0 (då $|\omega| > 2\pi$) och $-\frac{1}{2}$ (då $|\omega| < \pi$), så

Svar b: De sökta (egen)värdena är $\boldsymbol{\lambda = 0,\ \pm\frac{1}{2}}$.

$H(\omega)X_\lambda(\omega) = \lambda X_\lambda(\omega)$ betyder att $X_\lambda(\omega) = 0$ då $H(\omega) \neq \lambda$. Vi kan exempelvis ta $x_{\frac{1}{2}}(t) = \sin(\frac{3\pi}{2}t)$, $x_0(t) = \sin(3\pi t)$ och $x_{-\frac{1}{2}}(t) = 1$ eller som i:

Svar c: Ex. $\boldsymbol{x_{\frac{1}{2}}(t) = 2\operatorname{sinc} 2t - \operatorname{sinc} t}$, $\boldsymbol{x_0(t) = 2\operatorname{sinc} 4t - \operatorname{sinc} 2t}$ och $\boldsymbol{x_{-\frac{1}{2}}(t) = \operatorname{sinc} t}$.

5. Vi söker alla $y(t)$, $t \geq 0$ som för $t \geq 0$ uppfyller $y'(t) - 3\int_0^t e^{-2\tau} y(t-\tau)\,d\tau = \delta(t-1)$ och $y(0) = -\frac{1}{e}$.

Lösning: Eftersom ekvationen är $y' - 3e^{-2t} * y = \delta(t-1)$, ger laplacetransformation att $sY(s) - y(0) - 3\frac{1}{s+2}Y(s) = e^{-s}$, så $Y(s)\frac{s^2+2s-3}{s+2} = Y(s)\frac{(s-1)(s+3)}{s+2} = y(0) + e^{-s}$ och $Y(s) = (y(0) + e^{-s})\frac{s+2}{(s-1)(s+3)} = (y(0) + e^{-s})(\frac{\frac{3}{4}}{s-1} + \frac{\frac{1}{4}}{s+3})$ och $y(t) = y(0)(\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-3t}) + (\frac{3}{4}e^{t-1} + \frac{1}{4}e^{-3(t-1)})\mathcal{U}(t-1)$. Insättning av $y(0) = -\frac{1}{e}$ ger

Svar: Lösningen är $\boldsymbol{y(t) = \begin{cases} -\frac{3}{4e}e^t - \frac{1}{4e}e^{-3t}, & 0 \leq t < 1 \\ (\frac{e^3}{4} - \frac{1}{4e})e^{-3t}, & 1 < t \end{cases}}$.

(Kontroll: $y(t)$ har språnget 1 för $t = 1$, så $y'(t)$ innehåller $\delta(t-1)$.)

6. $x(t)$ är $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2T^2+1}\delta(t - nT)$ och vi söker tre olika uttryck för $X(\omega)$, genom att (a.) fouriertransformera varje term, (b.) som en T-sampling av $y(t)$, $X(\omega)$ uttryckt med $Y(\omega)$ (oändlig serie) och (c.) summera den serien exakt (i ett intervall).

Lösning: Eftersom $\delta(t - nT) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} e^{-inT\omega}$ får man termvis

Svar a: $\boldsymbol{X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2T^2+1} e^{-inT\omega}}$.

Eftersom $x(t) = y(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, där $y(t) = \frac{1}{t^2+1}$ med $Y(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$, och $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\frac{2\pi}{T})$, får man $X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\pi e^{-|\omega|} * \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) = \frac{\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|\omega - n\frac{2\pi}{T}|}$.

Svar b: $\boldsymbol{X(\omega) = \frac{\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|\omega - n\frac{2\pi}{T}|}}$.

$X(\omega)$ är en $\frac{2\pi}{T}$-periodisk funktion. Vi beräknar den exakt i intervallet $[0, \frac{2\pi}{T}]$:
Då $0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{T}$ gäller $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|\omega - n\frac{2\pi}{T}|} = \sum_{n=-\infty}^{0} e^{-\omega + n\frac{2\pi}{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\omega - n\frac{2\pi}{T}}$. Det blir (två summor av geometriska serier) $e^{-\omega}\frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi}{T}}} + e^{\omega}\frac{e^{-\frac{2\pi}{T}}}{1-e^{-\frac{2\pi}{T}}} = (e^{-(\omega-\frac{\pi}{T})} + e^{\omega-\frac{\pi}{T}})\frac{1}{e^{\frac{\pi}{T}} - e^{-\frac{\pi}{T}}} = \frac{\cosh(\omega - \frac{\pi}{T})}{\sinh\frac{\pi}{T}}$, så (vi glömmer inte faktorn $\frac{\pi}{T}$ framför summan)

Svar c: $\boldsymbol{X(\omega)}$ är $\boldsymbol{\frac{2\pi}{T}}$-periodisk och $\boldsymbol{= \frac{\pi}{T}\frac{\cosh(\omega - \frac{\pi}{T})}{\sinh\frac{\pi}{T}}}$ då $\boldsymbol{0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{T}}$.