KTH Matematik

Tentamen lördagen den 20 december 2008 för E (m.fl.)
SF1635(/5B1209), Signaler och system I

Skrivtid: 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: BETA, kursboken (Zill-Cullen),
"Fouriermetoder för Signaler och system I",
"Högre ordnings ekvationer och system av 1:a ordningen",
"Formelsamling i Signalbehandling" (rosa), räknedosa.

Betygsgränser:

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	FX(/K)	
krävs	40	36	32	28	24	20	poäng (inklusive bonus)

Betygen 5, 4, 3, K gäller kurs 5B1209.
FX(/K) innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Tid och plats för den meddelas vid behov senare.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

1. (7p) Bestäm alla funktioner $y(x)$ som uppfyller

$$\begin{cases} xy' - 2(\ln x)\,y = \ln x, & x > 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}.$$

2. Betrakta differentialekvationen för $y = y(x)$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{e^{-x} + e^{-2x}}.$$

a. (2p) Finn ett linjärt system av första ordningens differentialekvationer som är ekvivalent med den givna ekvationen (dvs så att lösningar till systemet direkt motsvarar lösningar till ekvationen).

b. (5p) Finn (genom att använda a. eller på annat sätt) den allmänna lösningen till ekvationen.

V.g. vänd!

3. Funktionen $x(t)$ är 4-periodisk och uppfyller $x(t) = \begin{cases} t(2-t), & 0 < t \le 2 \\ 0, & -2 < t \le 0 \end{cases}$.

a. (3p) Bestäm de generaliserade derivatorna $x'(t)$, $x''(t)$ och $x'''(t)$.

b. (5p) Använd $x'''(t)$ för att finna $x(t)$:s komplexa fourierserie, med koefficienter $c_n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Glöm inte fallet $n = 0$.
Använd sedan den komplexa fourierserien för att finna koefficienterna $a_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ och $b_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ i den reella serien.

c. (2p) Använd resultatet i b. för att visa att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Ett linjärt tidsinvariant system (ett LTI-system) har pulssvaret

$$h(t) = \operatorname{sinc} 2t - \operatorname{sinc} t.$$

a. (2p) Vad är systemets överföringsfunktion $H(\omega)$?

b. (3p) För vilka tal λ finns en insignal $x_\lambda(t)$ med $x_\lambda(t) \neq 0$ för något t och med utsignal $y_\lambda(t) = \lambda x_\lambda(t)$?

c. (3p) Ge för vart och ett av de möjliga värdena på λ i b. ett exempel på en sådan insignal $x_\lambda(t)$.

Funktionen $\operatorname{sinc} t$, sinus cardinalis, är här $\begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$.

5. (8p) Finn alla (styckvis deriverbara funktioner av exponentiell typ) $y(t),\ t \geq 0$, som för alla $t \geq 0$ uppfyller

$$y'(t) - 3\int_0^t e^{-2\tau} y(t-\tau)\, d\tau = \delta(t-1), \text{ och har } y(0) = -\frac{1}{e}.$$

$\delta(t)$ är här som vanligt Diracs deltafunktion.

6. Låt $x(t)$ vara (den generaliserade) funktionen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2T^2 + 1}\, \delta(t - nT),$$

där $T > 0$ är en konstant och $\delta(t)$ åter är Diracs deltafunktion.
Finn tre olika uttryck för $x(t)$:s fouriertransform $X(\omega)$ genom att:

a. (2p) Använda fouriertransformens definition term för term.

b. (5p) Betrakta $x(t)$ som en T-sampling av en funktion $y(t)$ och uttrycka $X(\omega)$ med hjälp av $Y(\omega)$ (som summan av en oändlig serie).

c. (3p) Summera serien i b. exakt för ω i ett lämpligt intervall $[0, \Omega]$ och ange hur $X(\omega)$ där ger $X(\omega)$ för ω utanför intervallet.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.