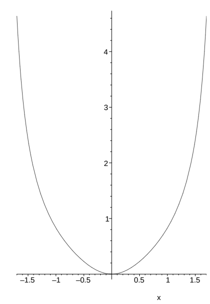
KTH Matematik

Lösningsförslag tenta SF1635(/5B1209), Signaler och system I, 9 juni 2009

(Fel kan förekomma.)

1. Vi skall (a.) finna allmänna lösningen till ekvationen $(1+x^2)y' - 2x(1+y^2) = 0$, (b.) lösningen med $y(0) = 0$ och (c.) dennas största lösningsintervall.

Lösning: Ekvationen är separabel. Den kan skrivas $(1+x^2, 1+y^2 \neq 0)$ $\frac{y'}{1+y^2} = \frac{2x}{1+x^2}$ och integration ger $\arctan y = \ln(1+x^2) + C$, C konstant. Den allmänna lösningen är alltså $y(x) = \tan(\ln(1+x^2)+C)$. Eftersom tan-funktionen är π-periodisk kan man ta t.ex. $-\frac{\pi}{2} < C \leq \frac{\pi}{2}$. Villkoret $y(0) = 0$ ger $0 = \tan(\ln 1 + C) = \tan C$, vi tar $C = 0$ och den sökta lösningen i (b.) är $y(x) = \tan(\ln(1+x^2))$. Den är definierad då $-\frac{\pi}{2} < \ln(1+x^2) < \frac{\pi}{2}$, dvs $e^{-\frac{\pi}{2}} < 1+x^2 < e^{\frac{\pi}{2}}$, så $|x| < \sqrt{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}$



Svar a.: Allmänna lösningen är $y(x) = \tan(\ln(1+x^2)+C)$, $-\frac{\pi}{2} < C \leq \frac{\pi}{2}$,
b.: Lösningen är $y(x) = \tan(\ln(1+x^2))$, c.: Största intervallet är $|x| < \sqrt{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}$.

---

2. Vi har $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ och skall (a.) finna en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t)$ till det homogena systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ och (b.) den allmänna lösningen till det inhomogena systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$.

Lösning: En fundamentalmatris har linjärt oberoende lösningar som kolonner, vi söker dem. Eftersom $\mathbf{A}$ bara har 0:or under diagonalen ges egenvärdena av diagonalelementen, $\lambda_{1,2} = 1, 3$. Motsvarande egenvektorer $\mathbf{k}_{1,2}$ är lösningar$\neq \mathbf{0}$ till $(\mathbf{A} - \lambda_i I)\mathbf{k}_i = \mathbf{0}$, dvs för $\mathbf{k}_1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och för $\mathbf{k}_2$: $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De ger linjärt oberoende lösningar $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{k}_1 e^t$ och $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{k}_2 e^{3t}$, så $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$. För att lösa systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$ använder vi variation av parametrar och skriver $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t)$, vilket ger ekvationen $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$, som ger $\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$, så $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} -t + c_1 \\ -e^{-2t} + c_2 \end{pmatrix}$. Insättning ger svaret

Svar a.: En fundamentalmatris är $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$,

b.: Lösningen $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -t\,e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ godtycklig, konstant.

---

3) $f(x)$ är 2π-periodisk och uppfyller $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ då $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ och $f(x) = 0$ då $\frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi$. Vi söker (a.) de generaliserade derivatorna $f'(x)$ och $f''(x)$, (b.) koefficienterna c_n i $f(x)$:s komplexa fourierserie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ och (c.) koefficienterna a_n och b_n i den reella fourierserien $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Lösning: Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig, är $f'(x) = \{f'(x)\} = -\operatorname{sgn} x$ då $|x| < \frac{\pi}{2}$ och $= 0$ då $\frac{\pi}{2} < |x| < \pi$, styckvis konstant.
Då är $f''(x) = 0 + \delta(x + \frac{\pi}{2}) - 2\delta(x) + \delta(x - \frac{\pi}{2})$, båda 2π-periodiska.
Fourierserien för $f''(x)$ är $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n^2)c_n e^{inx}$, så för $n \neq 0$ fås $-n^2 c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}(e^{in\frac{\pi}{2}} - 2 + e^{-in\frac{\pi}{2}})$ och $c_n = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos\frac{n\pi}{2})$.
Direkt fås $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \cdots = \frac{\pi}{8}$.
Eftersom $c_{-n} = c_n$ gäller för den reella seriens koefficienter att $a_n = c_n + c_{-n}$ och $b_n = 0$, alla $n = 0, 1, 2, \ldots$, så

Svar a: $f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x & \text{då } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{då } \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$, **$2\pi$-periodisk,**

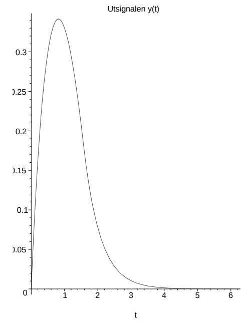
$f''(x) = \delta(x + \frac{\pi}{2}) - 2\delta(x) + \delta(x - \frac{\pi}{2})$, **$2\pi$-periodisk.**

b: De sökta koefficienterna är $c_0 = \frac{\pi}{8}$, $c_n = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos\frac{n\pi}{2})$, $n \neq 0$.

c: De sökta koefficienterna ges nu av

$a_0 = \frac{\pi}{4}$, $a_n = \frac{2}{\pi n^2}(1 - \cos\frac{n\pi}{2})$, $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

4. Ett LTI-system har pulssvaret $h(t)$, där $h(t) = \cos t$ då $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ och $h(t) = 0$ annars. Vi söker (a.) $H(s)$, laplacetransformen av $h(t)$, och utsignalen $y(t)$ om insignalen är $x(t) = e^{-2\,t} \cdot \mathcal{U}(t)$.



Lösning: Vi skriver $h(t) = \cos t \cdot (\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})) = \cos t \cdot \mathcal{U}(t) - \cos(t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \cdot \mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2}) = \cos t \cdot \mathcal{U}(t) + \sin(t-\frac{\pi}{2}) \cdot \mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})$, så $H(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$.
Eftersom $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$ ger $h(t) = x(t) = 0$ för $t < 0$ att $y(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$ ("laplacefaltning"), så ($X(s) = \frac{1}{s+2}$) $Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s}{(s+2)(s^2+1)} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{-\frac{2}{5}}{s+2} + \frac{\frac{2}{5}s+\frac{1}{5}}{s^2+1} + \left(\frac{\frac{1}{5}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{5}s+\frac{2}{5}}{s^2+1}\right)e^{-\frac{\pi}{2}s}$ och $y(t) = \left(-\frac{2}{5}e^{-2\,t} + \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\right) \cdot \mathcal{U}(t) + \left(\frac{1}{5}e^{-2(t-\frac{\pi}{2})} - \frac{1}{5}\cos(t-\frac{\pi}{2}) + \frac{2}{5}\sin(t-\frac{\pi}{2})\right) \cdot \mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2}) = (-\frac{2}{5}\mathcal{U}(t) + \frac{1}{5}e^{\pi}\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})) \cdot e^{-2\,t} + \left(\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\right)(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2}))$

Svar a: Transformen är $\boldsymbol{H(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}}$, b.: Utsignalen blir $\boldsymbol{y(t) = (-\frac{2}{5}\mathcal{U}(t) + \frac{1}{5}e^{\pi}\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2}))e^{-2\,t} + \left(\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\right)(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2}))}$ (se fig.).

---

5. $y(t)$, $t \geq 0$, (som har $y(t)$, $y'(t)$ kontinuerliga och av exponentiell typ och $y''(t)$ styckvis kontinuerlig) uppfyller för alla $t \geq 0$ att $y(t) = 1 + \int_0^t (y(\tau) + y'(\tau))\sin(t-\tau)\,d\tau$. Vi söker (a.) $y(0)$ och (b.) $y(t)$, $t > 0$.

Lösning: Insättning av $t = 0$ i ekvationen ger $y(0) = 1 + \int_0^0 (y(\tau) + y'(\tau))\sin(-\tau)\,d\tau = 1$.
De givna villkoren på $y(t)$ ger att $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ existerar och $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$, så (integralen är en "laplacefaltning") $Y(s) = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{y(t) + y'(t)\}\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s} + (Y(s) + sY(s) - 1)\frac{1}{s^2+1}$. Så $Y(1 - \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$ och $Y(s) = \frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2}$, så $y(t) = e^t - t$

Svar a.: $\boldsymbol{y(0) = 1}$, b.: $\boldsymbol{y(t) = e^t - t,\ t > 0}$.

---

6. Vi har $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\mathrm{sinc}(t-\tau)\,d\tau$ och $y_L(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} y(t-nL)$, L konstant. Vi söker (a.) $Y(\omega)$ uttryckt med $X(\omega)$, (b.) $Y_L(\omega)$ med $Y(\omega)$ och (c.) alla a, L så att $y_L(t) = a\sin\frac{2\pi t}{L}$, då $x(t) = e^{-|t|} \cdot \mathrm{sgn}\,t$.

Lösning: Eftersom $\mathrm{sinc}\,t \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$ och $y(t)$ är "fourierfaltningen" av $x(t)$ och $\mathrm{sinc}\,t$ är $Y(\omega) = X(\omega)\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$.
$y_L(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} y(t-nL) = y(t) * \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nL)$ och $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nL) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{2\pi}{L}\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{L})$, så $Y_L(\omega) = Y(\omega) \cdot \frac{2\pi}{L}\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{L}) = \frac{2\pi}{L}\sum_{-\infty}^{\infty} Y(n\frac{2\pi}{L})\delta(\omega - n\frac{2\pi}{L})$.
$y_L(t) = a\sin\frac{2\pi t}{L}$ betyder precis att $Y_L(\omega) = a(-\pi i)(\delta(\omega - \frac{2\pi}{L}) - \delta(\omega + \frac{2\pi}{L}))$.
Men då $x(t) = e^{-|t|} \cdot \mathrm{sgn}\,t$ är $X(\omega) = -\frac{2i\omega}{1+\omega^2}$, så $Y_L(\omega) = \frac{2\pi}{L}\sum_{-\infty}^{\infty} Y(n\frac{2\pi}{L})\delta(\omega - n\frac{2\pi}{L}) = \frac{2\pi}{L}\sum_{-\infty}^{\infty} X(n\frac{2\pi}{L})\,\mathrm{rect}(\frac{n}{L})\delta(\omega - n\frac{2\pi}{L})$. Villkoret blir dels att $\mathrm{rect}(\frac{n}{L}) = 0$ då $|n| > 1$, dvs $\frac{2}{L} > \frac{1}{2}$, och $\mathrm{rect}(\frac{\pm 1}{L}) = 1$, dvs $\frac{1}{L} < \frac{1}{2}$, så $2 < L < 4$, och dels att $\frac{2\pi}{L}X(\pm\frac{2\pi}{L}) = -\pm\frac{2\pi}{L}\frac{2i\frac{2\pi}{L}}{1+(\frac{2\pi}{L})^2} = \pm a(-\pi i)$, så $a = \frac{8\pi}{L^2+4\pi^2}$.

Svar a.: $\boldsymbol{Y(\omega) = X(\omega)\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})}$,
b.: $\boldsymbol{Y_L(\omega) = \frac{2\pi}{L}\sum_{-\infty}^{\infty} Y(n\frac{2\pi}{L})\delta(\omega - n\frac{2\pi}{L})}$,
c.: $\boldsymbol{a = \frac{8\pi}{L^2+4\pi^2}}$ och $\boldsymbol{2 < L < 4}$.
