KTH Matematik

Tentamen tisdagen den 9 juni 2009 för E, ME (m.fl.)
SF1635(/5B1209), Signaler och system I

Skrivtid: 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: BETA, kursboken (Zill-Cullen),
"Fouriermetoder för Signaler och system I",
"Högre ordnings ekvationer och system av 1:a ordningen",
"Formelsamling i Signalbehandling" (rosa), räknedosa.

Betygsgränser:

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	FX(/K)	
krävs	40	36	32	28	24	20	poäng (inklusive bonus)

Betygen 5, 4, 3, K gäller kurs 5B1209.
FX(/K) innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Tid och plats för den meddelas vid behov senare.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

1. Betrakta den ordinära differentialekvationen för $y = y(x)$

$$(1 + x^2)y' - 2x(1 + y^2) = 0.$$

a. (3p) Finn den allmänna lösningen till ekvationen.
b. (2p) Finn speciellt den lösning som uppfyller $y(0) = 0$.
c. (2p) Finn det största intervall där lösningen i b. är definierad.

2. Låt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

a. (3p) Bestäm en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t)$ till det homogena systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

b. (4p) Finn den allmänna lösningen till det inhomogena systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}.$$

V.g. vänd!

3. Låt den 2π-periodiska funktionen $f(x)$, som ges av att

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - |x|, & \text{då } |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{då } \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi \end{cases}.$$

ha den komplexa fourierserien

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

a. (4p) Bestäm de generaliserade derivatorna $f'(x)$ och $f''(x)$.
b. (4p) Bestäm alla koefficienterna c_n.
c. (2p) Bestäm alla koefficienterna a_n och b_n i f:s reella fourierserie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

4. Ett linjärt tidsinvariant system (ett LTI-system) har pulssvaret

$$h(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & t < 0,\ t > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

a. (3p) Vad är $H(s)$, laplacetransformen av $h(t)$?
b. (5p) Vad blir utsignalen $y(t)$ om insignalen är $x(t) = e^{-2t} \cdot \mathcal{U}(t)$?

$\mathcal{U}(t)$ är här Heavisides stegfunktion, $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$

5. Låt $y(t),\ t \ge 0$, (ha $y(t),\ y'(t)$ kontinuerliga och av exponentiell typ och $y''(t)$ styckvis kontinuerlig och) för alla $t \ge 0$ uppfylla

$$y(t) = 1 + \int_0^t (y(\tau) + y'(\tau)) \sin(t - \tau)\, d\tau.$$

a. (2p) Vad är $y(0)$?
b. (6p) Vad är $y(t),\ t > 0$?

6. Låt $x(t),\ -\infty < t < \infty$ vara en funktion (en signal) och definiera funktionerna $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \mathrm{sinc}(t - \tau)\, d\tau$ och $y_L(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} y(t - nL)$, L konstant.

Funktionen $\mathrm{sinc}\, t$, sinus cardinalis, är som vanligt $\begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t}, & t \ne 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}.$

a. (2p) Uttryck $y(t)$:s fouriertransform $Y(\omega)$ med $X(\omega)$, $x(t)$:s transform.
b. (3p) Uttryck $Y_L(\omega)$ med $Y(\omega)$.
c. (5p) Om $x(t) = e^{-|t|} \cdot \mathrm{sgn}\, t$, finn alla a, L så att $y_L(t) = a \sin \frac{2\pi t}{L}$.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.