KTH Matematik

Lösningsförslag tenta SF1635(/5B1209), Signaler och system I, 23 oktober 2009

1. Vi skall (a.) visa att $y(x) = e^{-x}$ löser ekvationen $xy'' + (2x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0$ och (b.) finna den allmänna lösningen till $xy'' + (2x+2)y' + (x+2)y = \frac{e^{-x}}{x}, \quad x > 0$.

Lösning: $y(x) = e^{-x}$ ger $y' = -e^{-x}$ och $y'' = e^{-x}$. Insättning i den homogena ekvationen ger $\text{VL} = (x - (2x+2) + (x+2))e^{-x} = 0 = \text{HL}$. Så **a. är klart**.

För att lösa den inhomogena ekvationen sätter vi (”reduktion av ordningen”) $y(x) = z(x)e^{-x}$. Då blir $y' = (z' - z)e^{-x}$, $y'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}$ och insättning i ekvationen ger $(x(z'' - 2z' + z) + (2x+2)(z' - z) + (x+2)z)e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x}$, dvs $xz'' + 2z' = \frac{1}{x}$, så $z'' + \frac{2}{x}z' = \frac{1}{x^2}$, en linjär ekvation för z'. Integrerande faktor: $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln|x|} = |x|^2 = x^2$, så ekvationen blir $(x^2 z')' = 1$, med lösning $x^2 z' = x + C$, dvs $z' = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$ och $(x > 0)$ $z = \ln x - \frac{C}{x} + c_2 = \ln x + c_1\frac{1}{x} + c_2$ med c_1, c_2 godtyckliga konstanter. $y(x) = z(x)e^{-x}$ ger

Svar b.: Lösningen $\boldsymbol{y(x) = e^{-x}\ln x + c_1\frac{e^{-x}}{x} + c_2 e^{-x}}$, $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$ godtyckliga konst.

2. Vi söker $x(t)$ och $y(t)$ som uppfyller $\begin{cases} x' + x = 10y \\ y' - 5y = -x \end{cases}$ och $x(0) = 0,\ y(0) = 1$.

Lösning: Alternativ 1, med egenvektorer etc.

Låt $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Då blir ekvationerna $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{A}$:s egenvärden: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 10 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda-2)^2 + 1$, så $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

Egenvektor till $\lambda_1 = 2 + i$: $\left(\begin{array}{cc|c} -3-i & 10 & 0 \\ -1 & 3-i & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3+i & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Två linjärt oberoende lösningar ges då av Re, Im av $\mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 3-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}(\cos t + i\sin t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 3\cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i\,e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t + 3\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$, så allmänna lösningen: $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 3\cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t + 3\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Konstanterna c_1, c_2 bestäms här av begynnelsevillkoret,

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, så $c_1 = 1$, $c_2 = 3$. Det ger

Svar: Lösningen är $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = 10\,e^{2t}\sin t} \\ \boldsymbol{y(t) = e^{2t}(\cos t + 3\sin t)} \end{cases}$

Alternativ 2, med laplacetransform.

Om man laplacetransformerar ekvationssystemet (och använder begynnelsevillkoret) får man

$\begin{cases} sX - 0 + X = 10Y \\ sY - 1 - 5Y = -X \end{cases}$, dvs $\begin{pmatrix} s+1 & -10 \\ 1 & s-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

och $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & -10 \\ 1 & s-5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}\begin{pmatrix} s-5 & 10 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s-2)^2 + 1}\begin{pmatrix} 10 \\ s+1 \end{pmatrix}$.

Således $X(s) = \frac{10}{(s-2)^2+1}$, $Y(s) = \frac{(s-2)+3}{(s-2)^2+1}$, så **svar** som ovan.

3. Ett LTI-system har pulssvaret $h(t) = e^{i\pi t}\,\mathrm{sinc}(3(t-4))$.

Vi söker utsignalen $y(t)$ för insignal $x(t) = \mathrm{sinc}(3t)$.

Lösning: Systemet är LTI, så $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau}\,\mathrm{sinc}(3(\tau-4))\,\mathrm{sinc}(t-\tau)\,d\tau$.

Det ger för fouriertransformerna att $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$.

Enligt formelsamling: $\mathrm{sinc}(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \mathrm{rect}\,\frac{\omega}{2\pi}$, så $\mathrm{sinc}(3t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{1}{3}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{6\pi}$, $\mathrm{sinc}(3(t-4)) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{1}{3}e^{-i\omega 4}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{6\pi}$ och $h(t) = e^{i\pi t}\,\mathrm{sinc}(3(t-4)) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{1}{3}e^{-i(\omega-\pi)4}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}e^{-i4\omega}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\pi}{6\pi} = H(\omega)$, medan $X(\omega) = \frac{1}{3}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{6\pi}$.

$\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\pi}{6\pi} = 1$ då $-2\pi < \omega < 4\pi$, $= 0$ f.ö. och $\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{6\pi} = 1$ då $-3\pi < \omega < 3\pi$, $= 0$ f.ö., så $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{9}e^{-i4\omega}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\pi}{6\pi}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{6\pi} = \frac{1}{9}e^{-i4\omega}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\frac{\pi}{2}}{5\pi}$.

Formelsamling igen: $\mathrm{sinc}(\frac{5}{2}t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{2}{5}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{5\pi}$, $\mathrm{sinc}(\frac{5}{2}(t-4)) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} e^{-i4\omega}\frac{2}{5}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega}{5\pi}$,

$\frac{5}{18}e^{i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{sinc}(\frac{5}{2}(t-4)) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{5}{18}\frac{2}{5}e^{-i4(\omega-\frac{\pi}{2})}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\frac{\pi}{2}}{5\pi} = \frac{1}{9}e^{-i4\omega}\,\mathrm{rect}\,\frac{\omega-\frac{\pi}{2}}{5\pi} = Y(\omega)$, så

Svar: Utsignalen $\boldsymbol{y(t) = \frac{5}{18}e^{i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{sinc}(\frac{5}{2}(t-4))}$.

4. $x(t) = \sin|t|$ då $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ och $= 0$ då $|t| > \frac{\pi}{2}$.
Vi söker (a.) de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$,
(b.) fouriertransformen $X(\omega)$ (med hjälp av $x(t) + x''(t)$) och
(c.) fourierseriekoefficienterna c_n för $x(t)$:s π-periodiska fortsättning.

Lösning: $x(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ -\sin t, & -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ och är styckvis kontinuerlig och deriverbar, så
$x'(t) = \{x'(t)\} + \delta(t + \frac{\pi}{2}) - \delta(t - \frac{\pi}{2}) = \delta(t + \frac{\pi}{2}) - \delta(t - \frac{\pi}{2}) + \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ -\cos t, & -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases},$
ty $x(t)$ har språng ± 1 i $t = \mp\frac{\pi}{2}$.
Eftersom också $\{x'(t)\}$ är styckvis kontinuerlig och deriverbar blir
$x''(t) = \{x'(t)\}' + \delta'(t+\frac{\pi}{2}) - \delta'(t-\frac{\pi}{2}) = \delta'(t+\frac{\pi}{2}) - \delta'(t-\frac{\pi}{2}) + 2\delta(t) + \begin{cases} -\sin t, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases},$
ty $\{x'(t)\}$ har ett språng 2 i $t = 0$.
Alternativt kan man notera att $x(t) = \operatorname{rect}\frac{t}{\pi}\operatorname{sgn}(t)\sin t$ och använda att $\operatorname{rect}(t)' = \delta(t + \frac{1}{2}) - \delta(t - \frac{1}{2})$ och $\operatorname{sgn}(t)' = 2\delta(t)$. Man får $x'(t) = \cdots = \delta(t+\frac{\pi}{2}) - \delta(t-\frac{\pi}{2}) + \operatorname{rect}\frac{t}{\pi}\operatorname{sgn}(t)\cos t$ och $x''(t) = \delta'(t + \frac{\pi}{2}) - \delta'(t - \frac{\pi}{2}) + 2\delta(t) - \operatorname{rect}\frac{t}{\pi} \cdot \operatorname{sgn}(t)\sin t$, samma som ovan.
Man ser att $x(t) + x''(t) = \delta'(t + \frac{\pi}{2}) - \delta'(t - \frac{\pi}{2}) + 2\delta(t)$, så fouriertransformation ger $X(\omega) + (i\omega)^2 X(\omega) = i\omega e^{i\omega\frac{\pi}{2}} - i\omega e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} + 2 = 2 - 2\omega\sin(\frac{\pi}{2}\omega)$, dvs $X(\omega) = 2\frac{1-\omega\sin(\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega^2}$.
(För $\omega = \pm 1$ fås $X(\pm 1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{\mp i\omega t}\,dt = \cdots = 1$, vilket gör $X(\omega)$ kontinuerlig för $\omega = \pm 1$.)
Fourierserien för den π-periodiska fortsättningen är $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2nt}$, med (enligt formelsamlingen) $c_n = \frac{1}{\pi}X(n\frac{2\pi}{\pi}) = \frac{1}{\pi}X(2n) = \frac{2}{\pi}\frac{1-2n\sin(\frac{\pi}{2}2n}{1-4n^2} = \frac{2}{\pi(1-4n^2)}$.

Svar: a. $\boldsymbol{x'(t) = \delta(t + \frac{\pi}{2}) - \delta(t - \frac{\pi}{2}) + \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ -\cos t, & -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}}$ **och**
$\boldsymbol{x''(t) = \delta'(t + \frac{\pi}{2}) - \delta'(t - \frac{\pi}{2}) + 2\delta(t) + \begin{cases} -\sin t, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}},$
b. $\boldsymbol{X(\omega) = 2\,\frac{1-\omega\sin(\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega^2}}$ **då** $\boldsymbol{\omega \neq \pm 1}$ **och** $\boldsymbol{= 1}$ **då** $\boldsymbol{\omega = \pm 1}$,
c. fourierserien är $\boldsymbol{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2nt}}$, **med** $\boldsymbol{c_n = \frac{2}{\pi(1-4n^2)}}$.

5. Funktionen $y(t)$, $t \geq 0$ (deriverbar och med $y'(t)$ styckvis kontinuerlig och av exponentiell typ) uppfyller att $y(t) = \cos t + 2\int_0^t y'(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$.
Vi söker (a.) $y(0)$ och (b.) $y(t)$ för $t > 0$.

Lösning: Med $t = 0$ ger ekvationen att $y(0) = \cos 0 + 2\int_0^0 y'(\tau)\sin(-\tau)\,d\tau$, så $\boldsymbol{y(0) = 1}$.
Det betyder att $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - 1$ och laplacetransformation av ekvationen ger (integralen i HL är ju en faltning) $Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + 2(sY(s)-1)\frac{1}{s^2+1}$, så $(s^2+1)Y(s) = s + 2sY(s) - 2$ och $Y(s) = \frac{s-2}{(s-1)^2} = \frac{-1+(s-1)}{(s-1)^2} = -\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}$. $\mathcal{L}^{-1}$ ger $\boldsymbol{y(t) = -te^t + e^t}$.

Svar: a. $\boldsymbol{y(0) = 1}$, **b.** $\boldsymbol{y(t) = -te^t + e^t}$ **för** $\boldsymbol{t > 0}$.

6. Funktionen $x(t)$ har fouriertransformen $X(\omega) = \cos(4\omega)\,e^{-|\omega|}$. Vi söker (a.) t-funktionen med fouriertransform $e^{-|\omega|}$, då vi vet att $e^{-|t|}$ har transformen $\frac{2}{1+\omega^2}$, (b.) $x(t)$ och (c.) alla L sådana att $x(t)$:s L-periodiska fortsättning $x_L(t)$ är $\frac{L}{2}$-periodisk.

Lösning: Eftersom $e^{-|t|} \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{2}{1+\omega^2}$ gäller (dualitet) att $\frac{2}{1+t^2} \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} 2\pi e^{-|-\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|}$, så $\boldsymbol{\frac{1}{\pi(1+t^2)} \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} e^{-|\omega|}}$.
$X(\omega) = \cos(4\omega)e^{-|\omega|} = \frac{1}{2}e^{i4\omega}e^{-|\omega|} + \frac{1}{2}e^{-i4\omega}e^{-|\omega|}$ ger direkt (med föregående och fs) att $x(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi(1+(t+4)^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi(1+(t-4)^2)}$, så $\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{1+(t+4)^2} + \frac{1}{1+(t-4)^2})}$.
Fourierserien för den L-periodiska $x_L(t)$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}t}$ har koefficienter $c_n = \frac{1}{L}X(n\frac{2\pi}{L}) = \frac{1}{L}\cos(4n\frac{2\pi}{L})e^{-|n\frac{2\pi}{L}|}$ (enligt formelsamling eller kort bevis). Funktionen är $\frac{L}{2}$-periodisk precis om $c_n = 0$ för **alla udda** n ($e^{in\frac{2\pi}{L}t}$ är ju $\frac{L}{2}$-periodisk precis om n är jämnt och de är alla linjärt oberoende). Villkoret är alltså att $\cos(4n\frac{2\pi}{L}) = \cos(n\frac{16}{L}\frac{\pi}{2}) = 0$, dvs att $n\frac{16}{L}$ är ett udda heltal, för alla udda n. Det inträffar precis om $\frac{16}{L}$ är ett udda heltal ($n = 1$ är udda, så det måste vara så och om det är så är villkoret uppfyllt för alla udda n), så

Svar: a. $\boldsymbol{\frac{1}{\pi(1+t^2)}}$ **har transformen** $\boldsymbol{e^{-|\omega|}}$, **b.** $\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{1+(t+4)^2} + \frac{1}{1+(t-4)^2})}$,
c. $\boldsymbol{x_L(t)}$ **är** $\boldsymbol{\frac{L}{2}}$**-periodisk precis om** $\boldsymbol{L = \frac{16}{k}}$ **för ett udda heltal** $\boldsymbol{k}$.