KTH Matematik

Lösningsförslag tenta SF1635(/5B1209), Signaler och system I,
15 december 2009

1. Vi söker lösningen till $y' = x^2 y^2$ med $y(0) = 1$ och maximalt definitionsintervall, liksom det intervallet.

Lösning: Ekvationen är separabel. En lösning (som inte uppfyller vårt begynnelsevillkor) är $y(x) = 0$, alla x. Om $y(x) \neq 0$ kan ekvationen skrivas $\frac{y'}{y^2} = x^2$, dvs $(-\frac{1}{y})' = (\frac{x^3}{3})'$, så $-\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + C$, C en godtycklig konstant. Villkoret $y(0) = 1$ ger $C = -1$ och $y(x) = \frac{1}{1-\frac{x^3}{3}} = \frac{3}{3-x^3}$. Funktionen i HL är definierad och deriverbar utom för $3 - x^3 = 0$, dvs utom för $x = \sqrt[3]{3}$. Det sökta intervallet innehåller $x = 0$ (där y:s värde var givet), så
Svar: Lösningen $\boldsymbol{y(x) = \frac{3}{3-x^3}}$, intervallet $]-\infty, \sqrt[3]{3}[$.

2. Vi söker de funktioner $x(t)$ och $y(t)$ som uppfyller $x' = 5x - 5y,\ y' = 2x - y$ och $x(0) = 1,\ y(0) = 2$.

Lösning: Alternativ 1, med egenvektorer etc.
Låt $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Då blir ekvationerna $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{A}$:s egenvärden: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1$, så $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.
Egenvektor till $\lambda_1 = 2 + i$: $\left(\begin{array}{cc|c} 3-i & -5 & 0 \\ 2 & -3-i & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3-i & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \end{pmatrix}$.
Två linjärt oberoende lösningar ges då av Re, Im av $\mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}(\cos t + i \sin t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 3\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + i\, e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$, så allmänna lösningen: $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 3\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$. Konstanterna c_1, c_2 bestäms här av begynnelsevillkoret,
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, så $c_1 = 1$, $c_2 = -2$. Det ger

Svar: Lösningen är $\boldsymbol{\begin{cases} x(t) = e^{2t}(\cos t - 7\sin t) \\ y(t) = e^{2t}(2\cos t - 4\sin t) \end{cases}}$

Alternativ 2, med laplacetransform.
Om man laplacetransformerar ekvationssystemet (och använder begynnelsevillkoret) får man

$$\begin{cases} sX - 1 = 5X - 5Y \\ sY - 2 = 2X - Y \end{cases}, \text{ dvs } \begin{pmatrix} s-5 & 5 \\ -2 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-5 & 5 \\ -2 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{s^2 - 4s + 5}\begin{pmatrix} s+1 & -5 \\ 2 & s-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(s-2)^2 + 1}\begin{pmatrix} s-9 \\ 2s-8 \end{pmatrix}$.
Således $\boldsymbol{X(s) = \frac{(s-2)-7}{(s-2)^2+1}}$, $\boldsymbol{Y(s) = \frac{2(s-2)-4}{(s-2)^2+1}}$, så **svar** som ovan.

3. Vi söker fouriertransformerna (a.) $F(\omega)$ och (b.) $G(\omega)$, $H(\omega)$ för funktionerna

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sinc}(2u)}{(t-u)^2 + 9}\,du \quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\,\operatorname{sinc}(2u)}{(t-u)^2 + 9}\,du \quad \text{och} \quad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2\,\operatorname{sinc}(2u)}{(t-u)^2 + 9}\,du.$$

Lösning: $f(t)$ är faltningen av $\operatorname{sinc}(2t)$ och $\frac{1}{t^2+9}$, så $F(\omega)$ är produkten av deras transformer.
$\operatorname{sinc}(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \operatorname{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$, så $\operatorname{sinc}(2t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{1}{2}\operatorname{rect}(\frac{\omega}{4\pi})$, och $\frac{1}{t^2+3^2} \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}$, så

Svar a: $\boldsymbol{F(\omega) = \frac{\pi}{6}e^{-3|\omega|}\operatorname{rect}(\frac{\omega}{4\pi}) = \begin{cases} \frac{\pi}{6}e^{-3|\omega|}, & |\omega| < 2\pi \\ 0, & |\omega| > 2\pi \end{cases}}$.

$g(t) = t\,f(t)$, så $G(\omega) = iF'(\omega) = i\frac{d}{d\omega}F(\omega)$. $F(\omega)$ har språng $\pm\frac{\pi}{6}e^{-6\pi}$ i $\omega = \mp 2\pi$ och är f.ö. deriverbar utom i $\omega = 0$, så

Svar b$_1$: $\boldsymbol{G(\omega) = \frac{i\pi\, e^{-6\pi}}{6}(\delta(\omega + 2\pi) - \delta(\omega - 2\pi)) + \begin{cases} -\frac{i\pi}{2}e^{-3\omega}, & 0 < \omega < 2\pi \\ \frac{i\pi}{2}e^{3\omega}, & -2\pi < \omega < 0 \\ 0, & |\omega| > 2\pi \end{cases}}$
$\boldsymbol{(= \ldots - \frac{i\pi}{2}e^{-3|\omega|}\operatorname{sgn}(\omega)\operatorname{rect}(\frac{\omega}{4\pi}))}$.

$h(t) = t\,g(t)$, så $H(\omega) = iG'(\omega)$. $G(\omega)$ har (δ-funktioner och) språng $\frac{i\pi}{2}e^{-6\pi}$ i $\omega = \pm 2\pi$ och $-i\pi$ i $\omega = 0$ och är f.ö. deriverbar, så

Svar b$_2$: $\boldsymbol{H(\omega) = -\frac{\pi\, e^{-6\pi}}{6}(\delta'(\omega + 2\pi) - \delta'(\omega - 2\pi)) - \frac{\pi\, e^{-6\pi}}{2}(\delta(\omega + 2\pi) + \delta(\omega - 2\pi)) + \pi\delta(\omega) + \begin{cases} -\frac{3\pi}{2}e^{-3\omega}, & 0 < \omega < 2\pi \\ -\frac{3\pi}{2}e^{3\omega}, & -2\pi < \omega < 0 \\ 0, & |\omega| > 2\pi \end{cases} (= \ldots - \frac{3\pi}{2}e^{-3|\omega|}\operatorname{rect}(\frac{\omega}{4\pi}))}$.

4. Funktionen $x(t) = (t - \frac{\pi}{2})^2$ då $0 < t < \pi$ och 0 annars. Vi söker (a.) de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$, skall (b.) använda $x''(t)$ för att bestämma fouriertransformen $X(\omega)$ och skall (c.) bestämma sinusserien för $x(t)$, dvs koefficienterna $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ så att $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$ för $0 < t < \pi$.

Lösning: $x(t)$ har språng $\pm\frac{\pi^2}{4}$ i $t = 0$, π och är f.ö. deriverbar, så

$$x'(t) = \tfrac{\pi^2}{4}(\delta(t) - \delta(t-\pi)) + \begin{cases} 2t - \pi, & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{annars} \end{cases}.$$

$x'(t)$ har (δ-funktioner och) språng $-\pi$ i $t = 0$, π och är f.ö. deriverbar, så $x''(t)$ blir enligt

Svar a: $\boldsymbol{x'(t) = \frac{\pi^2}{4}(\delta(t) - \delta(t-\pi)) + \begin{cases} 2t - \pi, & 0 < t < \pi \\ 0, & \textbf{annars} \end{cases},}$

$$\boldsymbol{x''(t) = \frac{\pi^2}{4}(\delta'(t) - \delta'(t-\pi)) - \pi(\delta(t) + \delta(t-\pi)) + \begin{cases} 2, & 0 < t < \pi \\ 0, & \textbf{annars} \end{cases}.}$$

$\widehat{x''}(\omega) = (i\omega)^2\widehat{x}(\omega)$, så för $\omega \neq 0$ gäller $X(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} x''(t)e^{-i\omega t}dt = -\frac{1}{\omega^2}(\frac{\pi^2}{4}(-(-i\omega)e^{-i\omega 0} + (-i\omega)e^{-i\omega\pi}) - \pi(e^{-i\omega 0} + e^{-i\omega\pi}) + \int_0^{\pi} 2e^{-i\omega t}dt) = -\frac{1}{\omega^2}(\frac{\pi^2}{4}i\omega(1 - e^{-i\omega\pi}) - \pi(1 + e^{-i\omega\pi}) + \frac{2}{-i\omega}(e^{-i\omega\pi} - 1)) = -\frac{1}{\omega^2}(i(\frac{\pi^2}{4}\omega - \frac{2}{\omega})(1 - e^{-i\omega\pi}) - \pi(1 + e^{-i\omega\pi}))$.

För $\omega = 0$ fås $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = \frac{\pi^3}{12}$

Svar b: $\boldsymbol{X(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega^2}(\pi(1 + e^{-i\omega\pi}) - i(\frac{\pi^2}{4}\omega - \frac{2}{\omega})(1 - e^{-i\omega\pi})), & \omega \neq 0 \\ \frac{\pi^3}{12}, & \omega = 0 \end{cases}.}$

Sinusserien för $x(t)$ på $[0, \pi]$ är samma som fourierserien för $y(t) = x(t) - x(-t)$ på $[-\pi, \pi]$. För $\omega \neq 0$ fås $Y(\omega) = X(\omega) - X(-\omega) = \frac{1}{\omega^2}(\pi(e^{-i\omega\pi} - e^{i\omega\pi}) - i(\frac{\pi^2}{4}\omega - \frac{2}{\omega})(1 - e^{-i\omega\pi} + 1 - e^{i\omega\pi}))$ och $Y(0) = 0$. Om $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ för $-\pi < t < \pi$ gäller $c_n = \frac{1}{2\pi}Y(n) = \frac{1}{2\pi n^2}(\pi((-1)^n - (-1)^n) - i(\frac{\pi^2}{4}n - \frac{2}{n})(2 - 2(-1)^n)) = \frac{-i}{\pi n^2}(\frac{\pi^2}{4}n - \frac{2}{n})(1 - (-1)^n)$ för $n \neq 0$ och $c_0 = 0$. Koefficienterna i motsvarande reella fourierserie är $a_n = c_n + c_{-n} = 0$ och $b_n = i(c_n - c_{-n}) = (\frac{\pi}{2n} - \frac{4}{\pi n^3})(1 - (-1)^n)$, så

Svar c: De sökta koefficienterna är $\boldsymbol{b_n = (1 - (-1)^n)\frac{\pi^2 n^2 - 8}{2\pi n^3}}$.

5. Vi söker en funktion $y(t),\ t \geq 0$, så att $y'(t) = \delta(t-1) + 2\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau$ och $y(0) = 3$.

Lösning: Integralen i ekvationens HL är en (laplace)faltning. Laplacetransformation av ekvationen ger (med villkoret på $y(0)$) $sY(s) - y(0) = e^{-s} + 2Y(s)\frac{1}{s-1}$, så $(s - \frac{2}{s-1})Y(s) = \frac{s^2-s-2}{s-1}Y(s) = 3 + e^{-s}$ och $Y(s) = (3 + e^{-s})\frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = (3 + e^{-s})\left(\frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{\frac{2}{3}}{s+1}\right)$. $\mathcal{L}^{-1}$ ger $y(t) = e^{2t} + 2\,e^{-t} + \frac{1}{3}(e^{2(t-1)} + 2\,e^{-(t-1)})\,\mathcal{U}(t-1)$ ($\mathcal{U}(t)$ är Heavisides stegfunktion) så

Svar: $\boldsymbol{y(t) = e^{2t} + 2\,e^{-t} + \frac{1}{3}(e^{2(t-1)} + 2\,e^{-(t-1)})\,\mathcal{U}(t-1)}$ för $\boldsymbol{t > 0}$.

6. Funktionen $x(t)$ har fouriertransformen $\mathcal{X}(f)$ ($f = \frac{\omega}{2\pi}$).
Vi skall (a.) finna fouriertransformen för $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t - nT)$ och (b.) visa hur $x(t)$ kan återskapas ur värdena $x(nT)$ om $\mathcal{X}(f) = 0$ då $|f| \leq \frac{1}{2T}$ eller $|f| \geq \frac{1}{T}$.

Lösning: $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t - nT) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$, så (transformen (med f) av en produkt är faltningen av transformerna av faktorerna) $\mathcal{Y}(f) = \mathcal{X}(f) * \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - n\frac{1}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{X}(f) * \delta(f - n\frac{1}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{X}(f - n\frac{1}{T})$,

Svar a: $\boldsymbol{\mathcal{Y}(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{X}(f - n\frac{1}{T})}$, dvs $\boldsymbol{\frac{1}{T}}\cdot$ den $\boldsymbol{\frac{1}{T}}$-periodiska fortsättningen av $\boldsymbol{\mathcal{X}(f)}$.

Villkoret på $\mathcal{X}(f)$ medför att högst en term i serien för $\mathcal{Y}(f)$ är $\neq 0$ för varje f och

$$\mathcal{X}(f) = \begin{cases} T\mathcal{Y}(f), & \frac{1}{2T} < |f| < \frac{1}{T} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \text{ så } \mathcal{X}(f) = (T\,\mathrm{rect}(2T(f + \tfrac{3}{4T}) + T\,\mathrm{rect}(2T(f - \tfrac{3}{4T}))\mathcal{Y}(f)$$

(rektangelfunktionerna ”tar ut” rätt intervall).

$\mathrm{sinc}(t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \mathrm{rect}(f)$, så $\mathrm{sinc}(\frac{t}{2T}) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} 2T\,\mathrm{rect}(2Tf)$ och $e^{\pm i2\pi\frac{3}{4T}t}\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{2T}) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} 2T\,\mathrm{rect}(2T(f \mp \frac{3}{4T}))$ och $\cos(2\pi\frac{3}{4T}t)\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{2T}) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} T\,\mathrm{rect}(2T(f + \frac{3}{4T}) + T\,\mathrm{rect}(2T(f - \frac{3}{4T})$ och
$x(t) = \cos(2\pi\frac{3}{4T}t)\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{2T}) * y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,(\cos(\frac{3\pi}{2T}t)\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{2T})) * \delta(t - nT)$, så

Svar b: $\boldsymbol{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\ \cos(\frac{3\pi}{2T}(t - nT))\,\mathrm{sinc}(\frac{t-nT}{2T})}$.