KTH Matematik

Tentamen tisdagen den 15 december 2009 för E (m.fl.)
SF1635(/5B1209), Signaler och system I

Skrivtid: 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook,
"Formelsamling i Signalbehandling" (rosa),
"Formelsamling för Kursen SF1635 etc." (särtryck från kompendiet).

Betygsgränser:

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	FX(/K)	
krävs	40	36	32	28	24	20	poäng (inklusive bonus)

Betygen 5, 4, 3, K gäller kurs 5B1209.
FX(/K) innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Tid och plats för den meddelas vid behov senare.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

1. (7p) Finn den lösning till problemet

$$\begin{cases} y' = x^2\, y^2 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

som har maximalt definitionsintervall. Ange också detta intervall.

2. (7p) Bestäm de funktioner $x(t)$ och $y(t)$ som uppfyller

$$\begin{cases} x' = 5x - 5y \\ y' = 2x - y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 2. \end{cases}$$

3a. (4p) Finn fouriertransformen $F(\omega)$ för funktionen

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sinc}(2u)}{(t-u)^2 + 9}\, du.$$

b. (5p) Finn fouriertransformerna $G(\omega)$ och $H(\omega)$ för funktionerna

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\, \operatorname{sinc}(2u)}{(t-u)^2 + 9}\, du, \quad \text{och} \quad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2\, \operatorname{sinc}(2u)}{(t-u)^2 + 9}\, du.$$

$\operatorname{sinc}(t)$ betecknar här (som vanligt) *sinus cardinalis*, $\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}.$

V.g. vänd!

4. Låt
$$x(t) = \begin{cases} (t - \frac{\pi}{2})^2, & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{annars} \end{cases}.$$
a. (3p) Bestäm de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$.
b. (3p) Använd $x''(t)$ för att bestämma fouriertransformen $X(\omega)$.
c. (4p) Bestäm sinusserien för $x(t)$, dvs finn koefficienter $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ så att
$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \text{ för } 0 < t < \pi.$$

5. (8p) Finn en funktion $y(t),\ t \geq 0$, som uppfyller att
$$\begin{cases} y'(t) = \delta(t-1) + 2\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau \\ y(0) = 3. \end{cases}$$
$\delta(t)$ betecknar här (som vanligt) Diracs deltafunktion.

6. En funktion (signal) $x(t)$ har fouriertransformen $\mathcal{X}(f)$ (där $f = \frac{\omega}{2\pi}$). Signalen samplas med samplingsavståndet T, dvs för $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ mäter man $x(nT)$.
a. (5p) Låt
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t - nT),$$
där $\delta(t)$ är Diracs deltafunktion. Vad är $y(t)$:s fouriertransform $\mathcal{Y}(f)$ (uttryckt i $\mathcal{X}(f)$)?
b. (4p) Om $x(t)$ är sådan att $\mathcal{X}(f) = 0$ då $|f| \leq \frac{1}{2T}$ eller $|f| \geq \frac{1}{T}$, visa hur $x(t)$ kan återskapas ur de samplade värdena $x(nT)$.

Lycka till!
Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.