KTH Matematik

Lösningsförslag tenta SF1635(/5B1209), Signaler och system I, 8 juni 2010

1. Vi söker ett samband som bestämmer $y(x)$ implicit då $y' = \frac{x^2+3}{(x^2+1)(y^3+2)}$ och $y(0) = 2$.

Lösning: Ekvationen är separabel. Vi skriver om den som $(y^3+2)\,y' = \frac{x^2+3}{x^2+1} = 1+\frac{2}{x^2+1}$ och integrerar m.a.p. x. Det ger $\int(y^3+2)\,dy = \int(1+\frac{2}{x^2+1})\,dx$, dvs $\frac{y^4}{4}+2y = x+2\arctan x+C$, C en konstant som bestäms av villkoret $y(0) = 2$: $\frac{2^4}{4} + 2\cdot 2 = 0 + \arctan 0 + C$, så $C = 8$.
Svar: $y(x)$ bestäms av $\frac{y^4}{4} + 2y = x + 2\arctan x + 8$.

---

2. Vi söker (a.) en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t)$ till det homogena systemet $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ och (b.) den allmänna lösningen till det inhomogena systemet $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$.

Lösning: Alternativ 1, med egenvektorer etc.
En fundamentalmatris har linjärt oberoende lösningar som kolonner.
Egenvärdena ges av $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$, så $\lambda_{1,2} = \pm 1$.
Egenvektor till $\lambda_1 = 1$: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{smallmatrix} \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Egenvektor till $\lambda_2 = -1$: $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{smallmatrix} \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Två linjärt oberoende lösningar ges då av $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{k}_i e^{\lambda_i t}$, så man kan ta $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & -3e^{-t} \end{pmatrix}$.
För att finna den allmänna lösningen till systemet $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ använder vi variation av parametrar och skriver $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t)$. Det ger ekvationen $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, som ger $\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2e^{2t} \end{pmatrix}$, så $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 5t+c_1 \\ -e^{2t}+c_2 \end{pmatrix}$. Insättning ger svaret.
Svar: a. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & -3e^{-t} \end{pmatrix}$,
b. lösningen $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} (5t-1)\,e^t \\ (-5t+3)e^t \end{pmatrix} + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ godtycklig, konstant.

Alternativ 2, med laplacetransform får man att $\mathcal{L}\{\mathbf{\Phi}(t)\} = (sI - \mathbf{A})^{-1}$ (vilket ger en annan $\mathbf{\Phi}(t)$ än ovan, med $\mathbf{\Phi}(0) = I$) och $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ ger $(sI - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{F}(s)$ ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$) etc., **svar** som ovan.

---

3. Funktionen $f(t) = \frac{e^{-t^2}}{1+t^2+\sin t}$ har fouriertransformen $g(\omega)$. Vi söker (a.) $g(t)$:s fouriertransformen $G(\omega)$ och (b.) fouriertransformen $H(\omega)$ av $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\tau} g(3\tau) g(t-\tau-1)\,d\tau$.

Lösning: Dualitet ger att $G(\omega) = 2\pi f(-\omega)$ och eftersom $h(t)$ är faltningen av $e^{2it}g(3t)$ och $g(t-1)$ är $H(\omega)$ produkten av deras fouriertransformer. Enligt fs, $g(3t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{1}{3}G(\frac{\omega}{3})$, så (fs igen) $e^{2it}g(3t) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} \frac{1}{3}G(\frac{\omega-2}{3})$ och $g(t-1) \overset{\mathcal{FT}}{\longmapsto} e^{-i\omega}G(\omega)$. Så $H(\omega) = \frac{4\pi^2}{3}e^{-i\omega}f(-\frac{\omega-2}{3})f(-\omega)$,

Svar: a. $G(\omega) = \frac{2\pi e^{-\omega^2}}{1+\omega^2-\sin\omega}$, b. $H(\omega) = \frac{4\pi^2}{3}e^{-i\omega}\frac{e^{-(\frac{\omega-2}{3})^2}}{1+(\frac{\omega-2}{3})^2-\sin\frac{\omega-2}{3}} \cdot \frac{e^{-\omega^2}}{1+\omega^2-\sin\omega}$.

---

4. $x(t) = e^t \sin(2t)$ då $0 \le t \le \pi$ och $= 0$ då $t < 0$ eller $t > \pi$. Vi söker (a.) $x'(t)$, $x''(t)$ och $y(t) = x''(t) - 2x'(t) + 5x(t)$, (b.) fouriertransformen $X(\omega)$ (med hjälp av $y(t)$) och (c.) fourierserien, med koefficienterna c_n, för $x(t)$:s π-periodiska fortsättning.

Lösning: Eftersom $x(t)$ är kontinuerlig ($\sin(2t) = 0$ för $t = 0,\ \pi$) är den generaliserade derivatan $x'(t) = \{x'(t)\}$, den klassiska derivatan, dvs

$$\boldsymbol{x'(t) = \begin{cases} e^t(2\cos(2t) + \sin(2t)), & 0 < t < \pi \\ 0, & t < 0 \text{ eller } t > \pi. \end{cases}}$$

$x'(t)$ är deriverbar utom i punkterna 0, π, där den har sprången 2, $-2e^{\pi}$, så

$\boldsymbol{x''(t)} = \{\{x'(t)\}'\} + 2\delta(t) - 2e^{\pi}\delta(t-\pi) =$

$$\boldsymbol{= 2\delta(t) - 2e^{\pi}\delta(t-\pi) + \begin{cases} e^t(4\cos(2t) - 3\sin(2t)), & 0 < t < \pi \\ 0, & t < 0 \text{ eller } t > \pi. \end{cases}}$$

Insättning ger $\boldsymbol{y(t)} = x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) \boldsymbol{= 2\delta(t) - 2e^{\pi}\delta(t-\pi)}$.

Fouriertransformation av detta ger ($x(t)$ är absolutintegrabel, så vi vet att $X(\omega)$ existerar som en vanlig funktion) $-\omega^2 X(\omega) - 2i\omega X(\omega) + 5X(\omega) = 2 - 2e^{\pi}e^{-i\pi\omega}$, så $\boldsymbol{X(\omega)} = \frac{2(e^{\pi(1-i\omega)}-1)}{\omega^2+2i\omega-5} \boldsymbol{= \frac{2(e^{\pi(1-i\omega)}-1)}{(\omega+i)^2-4}}$.

Fourierserien för den π-periodiska fortsättningen är $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{\pi}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2nt}$, med (enligt formelsamlingen) $c_n = \frac{1}{\pi}X(n\frac{2\pi}{\pi}) = \frac{1}{\pi}X(2n) = \frac{2}{\pi}\frac{e^{\pi(1-2ni)}-1}{(2n+i)^2-4} = \frac{2}{\pi}\frac{e^{\pi}-1}{(2n+i)^2-4}$.

Svar: a. $\boldsymbol{x'(t)}$**,** $\boldsymbol{x''(t)}$**,** $\boldsymbol{y(t)}$ **och b.** $\boldsymbol{X(\omega)}$ **enligt ovan.**
c. fourierserien är $\boldsymbol{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2nt}}$**, med** $\boldsymbol{c_n = \frac{2}{\pi}\frac{e^{\pi}-1}{(2n+i)^2-4}}$**.**

---

5. Funktionen $y(t)$, $t \ge 0$ (kontinuerlig och av exponentiell typ, med $y'(t)$ styckvis kontinuerlig) uppfyller att $y'(t) + e^{2t}\int_0^t e^{-2\tau}y(\tau)\,d\tau = 2(\cos t - \sin t)$ och $y(0) = 0$.
Vi söker $y(t)$ för $t > 0$.

Lösning: Laplacetransformering ger $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$. Andra termen blir en (laplace)faltning, $\mathcal{L}\{e^{2t}\int_0^t e^{-2\tau}y(\tau)\,d\tau\} = \mathcal{L}\{\int_0^t e^{2(t-\tau)}y(\tau)\,d\tau\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}Y(s) = \frac{1}{s-2}Y(s)$ och $\mathcal{L}\{2(\cos t - \sin t)\} = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$, så $sY(s) + \frac{1}{s-2}Y(s) = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$, dvs $\frac{s^2-2s+1}{s-2}Y(s) = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$, och $Y(s) = \frac{2(s-2)}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{s+3}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}$ (partialbråksuppdelning), som ger
Svar: $\boldsymbol{y(t) = \cos t + 3\sin t - e^t}$**.**

---

6. Funktionen $x(t)$ har fouriertransformen $X(\omega) = \frac{\omega\sin^2 5\omega}{(1+\omega^2)^3}$. Vi söker (a.) fouriertransformen av $x(t-L)$, (b.) fouriertransformen $X_L(\omega)$ av $x(t)$:s L-periodiska fortsättning $x_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nL)$ och (c.) alla L så att $x_L(t) = 0$ för alla t.

Lösning: Enligt fs, $x(t-L) \xmapsto{\mathcal{FT}} e^{-i\omega L}X(\omega)$.
$x_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nL) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nL)$, så $X_L(\omega) = X(\omega)\cdot\frac{2\pi}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\frac{2\pi}{L}) = \frac{2\pi}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\frac{2\pi}{L})\delta(\omega - n\frac{2\pi}{L})$ (alla likheter som generaliserade funktioner).
$x_L(t)$ skall vara 0 för alla t, dvs $X_L(\omega) = 0$ för alla ω. Det betyder precis att $X(n\frac{2\pi}{L}) = 0$, alla $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, dvs $n\sin(5n\frac{2\pi}{L}) = 0$, alla n. Det gäller omm $\frac{10n}{L}$ är ett heltal för alla n, dvs omm $\frac{10}{L}$ är ett heltal, dvs omm $L = 1,\ 2,\ 5$ eller 10.

Svar: a. $\boldsymbol{x(t-L) \xmapsto{\mathcal{FT}} e^{-i\omega L}\frac{\omega\sin^2 5\omega}{(1+\omega^2)^3}}$**, b.** $\boldsymbol{X_L(\omega) = \frac{2\pi}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\frac{2\pi}{L})\delta(\omega - n\frac{2\pi}{L})}$**,**
c. alla sådana värden är $\boldsymbol{L = 1,\ 2,\ 5,\ 10}$**.**
