KTH Matematik

Tentamen tisdagen den 8 juni 2010 för E, ME, IT (m.fl.)
SF1635(/5B1209), Signaler och system I

Skrivtid: 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook,
"Formelsamling i Signalbehandling" (rosa),
"Formelsamling för Kursen SF1635 etc." (särtryck från kompendiet).

Betygsgränser:

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	FX(/K)	
krävs	40	36	32	28	24	20	poäng (inklusive bonus)

Betygen 5, 4, 3, K gäller kurs 5B1209.
FX(/K) innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E(/3).
Preliminär tid för den är fredag 11 juni, klockan 15.15–17.00.
För att vi snabbt skall kunna meddela alla som får komplettera, **skriv din elpostadress utanpå omslaget till skrivningen!**

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

1. (7p) Finn ett samband (utan derivator) som bestämmer $y(x)$ implicit, då

$$y' = \frac{x^2+3}{(x^2+1)(y^3+2)} \quad \text{och} \quad y(0) = 2.$$

2a. (4p) Bestäm en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t)$ till det homogena systemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(Matrisen $\mathbf{\Phi}(t)$ skall alltså uppfylla $\mathbf{\Phi}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{\Phi}$ och $\det \mathbf{\Phi} \neq 0$.)

b. (3p) Finn den allmänna lösningen till det inhomogena systemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

3. Funktionen

$$f(t) = \frac{e^{-t^2}}{1+t^2+\sin t}$$

har fouriertransformen $(F(\omega) =) g(\omega)$.
a. (2p) Vad är fouriertransformen $G(\omega)$ av $g(t)$?
b. (6p) Vad är fouriertransformen $H(\omega)$ av

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\tau} g(3\tau) g(t-\tau-1)\, d\tau?$$

Svaren får inte innehålla integraler. Funktionerna $g(t)$ och $h(t)$ behöver inte bestämmas.

V.g. vänd!

4. Låt

$$x(t) = \begin{cases} e^t \sin(2t), & 0 \le t \le \pi \\ 0, & t < 0 \text{ eller } t > \pi. \end{cases}$$

a. (4p) Bestäm de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$ och den generaliserade funktionen $y(t) = x''(t) - 2x'(t) + 5x(t)$.
b. (3p) Använd $y(t)$ från a. för att bestämma $x(t)$:s fouriertransform $X(\omega)$.
c. (3p) Bestäm den komplexa fourierserien för den π-periodiska fortsättningen av $x(t)$ (med koefficienter c_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

5. (8p) Funktionen $y(t)$, $t \ge 0$ (kontinuerlig och av exponentiell typ, med $y'(t)$ styckvis kontinuerlig) uppfyller att

$$\begin{cases} y'(t) + e^{2t} \int_0^t e^{-2\tau} y(\tau)\, d\tau = 2(\cos t - \sin t), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Vad är $y(t)$ för $t > 0$?

6. Funktionen $x(t)$ har fouriertransformen $X(\omega) = \frac{\omega \sin^2 5\omega}{(1+\omega^2)^3}$.
a. (2p) Vad är fouriertransformen av $x(t - L)$?
b. (5p) Finn fouriertransformen $X_L(\omega)$ av $x(t)$:s L-periodiska fortsättning

$$x_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nL).$$

c. (3p) Finn alla L så att $x_L(t) = 0$ för alla t.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.