KTH Matematik

Lösningsförslag tenta SF1635(/5B1209), Signaler och system I, 20 oktober 2010

1. Vi söker (a.) allmänna lösningen och (b.) lösningen med $y(1) = 0$ och dess maximala definitionsintervall till ekvationen $(e^{y+x} - e^{y-x})y' = e^{x+y} + e^{x-y}$.

Lösning:

a. Ekvationen kan skrivas $e^y(e^x - e^{-x})y' = e^x(e^y + e^{-y})$. Den är tydligen separabel. För $x = 0$ blir den $0 = e^y + e^{-y}$, så ingen lösning finns i $x = 0$. Om $x \neq 0$ får man $\frac{e^y}{e^y+e^{-y}}y' = \frac{e^x}{e^x-e^{-x}}$ och förlängning ger $\frac{e^{2y}}{e^{2y}+1}y' = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$. Den integreras direkt till $\frac{1}{2}\ln|e^{2y}+1| = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1| + C$, så $e^{2y}+1 = e^{2C}|e^{2x}-1| = D(e^{2x}-1)$, $D(=\pm e^{2C}) \neq 0$ och den allmänna lösningen $y(x) = \frac{1}{2}\ln(D(e^{2x}-1)-1)$, med D en konstant $\neq 0$.
b. $y(1) = 0$ ger $0 = \frac{1}{2}\ln(D(e^2-1)-1)$, så $D(e^2-1)-1 = 1$, dvs $D = \frac{2}{e^2-1}$, och lösningen $y(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{2(e^{2x}-1)}{e^2-1} - 1)$. Vi söker ett maximalt intervall (som innehåller 1 och) med $\frac{2(e^{2x}-1)}{e^2-1} - 1 > 0$ (så ln är definierad), dvs $2(e^{2x}-1) > e^2 - 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$
Svar a.: Allmänna lösningen $y(x) = \frac{1}{2}\ln(D(e^{2x}-1)-1)$, D konstant, $\neq 0$,
b.: Lösning $y(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{2(e^{2x}-1)}{e^2-1} - 1)$, maximalt definitionsintervall $]\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}, \infty[$.

---

2. Vi söker $x(t)$ och $y(t)$ med $x(0) = 4$, $y(0) = -3$ och så att $6x = 3x' - 2y'$, $6y = 3x' - 4y'$.

Lösning:

Alternativ 1, med egenvektorer etc.
Låt $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Vi har $6\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}'$, dvs $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, med $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{A}$:s egenvärden: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2)$, så $\lambda_{1,2} = 3, -2$.
Egenvektor till $\lambda_1 = 3$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Egenvektor till $\lambda_2 = -2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Den allmänna lösningen blir $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Konstanterna c_1, c_2 bestäms av begynnelsevillkoret, $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, så $c_1 = 3$, $c_2 = -2$. Det ger
Svar: Lösningen är $x(t) = 6\,e^{3t} - 2\,e^{-2t}$ och $y(t) = 3\,e^{3t} - 6e^{-2t}$.

Alternativ 2, med laplacetransform.
$\mathcal{L}$-transformation av ekvationerna (med begynnelsevillkoren) ger $6X = 3(sX-4) - 2(sY+3)$ och $6Y = 3(sX-4) - 4(sY+3)$, dvs i matrisform $\begin{pmatrix} 3s-6 & -2s \\ 3s & -4s-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}$ och således fås $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s-6 & -2s \\ 3s & -4s-6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-6(s^2-s-6)}\begin{pmatrix} -4s-6 & 2s \\ -3s & 3s-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}$ och $X(s) = \frac{4s+18}{(s-3)(s+2)} = \frac{6}{s-3} - \frac{2}{s+2}$ och $Y(s) = \frac{-3s+24}{(s-3)(s+2)} = \frac{3}{s-3} - \frac{6}{s+2}$, så **svar** som ovan.

---

3. Ett visst kausalt ($h(t) = 0$ för $t < 0$) LTI-system tar insignalen $x(t)$ som är 1 för $0 < t < \pi$ och 0 f.ö. till utsignalen $y(t)$ som är 1 för $0 < t < 2\pi$ och 0 f.ö.
Vi söker (a.) laplacetransformen $H(s)$ av pulssvaret $h(t)$, (b.) pulssvaret $h(t)$,
(c.) utsignalen för insignal $x(t)$ som är $\sin t$ för $t > 0$ och 0 för $t < 0$ och
(d.) utsignalen för insignal $x(t) = \sin t$ för alla t.

Lösning:

a. Systemet är LTI, så $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$ (ty $h(t) = x(t) = 0$ då $t < 0$), så $Y(s) = H(s)X(s)$. Vi vet att $x(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\pi)$ ger $y(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2\pi)$, så $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{s}(1-e^{-2\pi s})}{\frac{1}{s}(1-e^{-\pi s})} = 1 + e^{-\pi s}$ och (b.) $h(t) = \delta(t) + \delta(t-\pi)$.
I c. är insignalen $x(t) = \sin t \cdot \mathcal{U}(t)$, så $X(s) = \frac{1}{s^2+1}$ och $Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s^2+1}(1 + e^{-\pi s})$, vilket ger $y(t) = \sin t + \sin(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi) = \sin t - \sin t \cdot \mathcal{U}(t-\pi)$, dvs $y(t) = \sin t$ för $0 < t < \pi$, 0 f.ö.
I d. kan vi använda faltningen (eller $Y(\omega)$), det kunde vi ha gjort i c. också. $x(t) = \sin t$ ger $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\tau(\delta(t-\tau) + \delta(t-\tau-\pi))\,d\tau = \sin t + \sin(t-\pi) = 0$ för alla t(!).
Svar a.: Sökta transformen $H(s) = 1 + e^{-\pi s}$, b.: Pulssvaret $h(t) = \delta(t) + \delta(t-\pi)$,
c.: Utsignalen $y(t)$ är $\sin t$ för $0 < t < \pi$, 0 f.ö., d.: Utsignalen blir 0 (för alla t).

---

4. Vi söker (a.) de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$ för $x(t)$ som är $= \sin t$ för $0 < t < \pi$, $= \cos t$ för $-\frac{\pi}{2} < t < 0$, $= 0$ f.ö. Vi skall också (b.) använda $x(t) + x''(t)$ för att bestämma fouriertransformen $X(\omega)$ och (c.) finna A som gör $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |y(t) - A\,e^{i4t}|^2\,dt$ minimal, där $y(t)$ är den π-periodiska fortsättningen för $x(t)$.

Lösning:

a. $x(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi \\ \cos t, & -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$ och är styckvis kontinuerlig och deriverbar, så

$\boldsymbol{x'(t)} = \{x'(t)\} - \delta(t) = \boldsymbol{-\delta(t) + \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \pi \\ -\sin t, & -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ 0, & \text{f.ö.,} \end{cases}}$ ty $x(t)$ har ett språng -1 i $t = 0$.

Också $\{x'(t)\}$ är styckvis kontinuerlig och deriverbar, så

$\boldsymbol{x''(t)} = \{x'(t)\}' - \delta'(t) = \boldsymbol{-\delta'(t) + \delta(t + \frac{\pi}{2}) + \delta(t) + \delta(t - \pi) + \begin{cases} -\sin t, & 0 < t < \pi \\ -\cos t, & -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ 0, & \text{f.ö.,} \end{cases}}$

ty $\{x'(t)\}$ har språng 1 i $t = -\frac{\pi}{2}$, 0, π.

b. $x(t) + x''(t) = -\delta'(t) + \delta(t + \frac{\pi}{2}) + \delta(t) + \delta(t - \pi)$, så fouriertransformering ger $X(\omega) + (i\omega)^2 X(\omega) = -(-(-i\omega)) + e^{i\frac{\pi}{2}\omega} + 1 + e^{-i\pi\omega}$, dvs $\boldsymbol{X(\omega) = \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{2}\omega} + e^{-i\pi\omega} - i\omega}{1 - \omega^2}}$.
(Också för $\omega = \pm 1$ blir $X(\omega)$ kontinuerlig)

c. Enligt teorin för fourierserier är $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |y(t) - A\,e^{i4t}|^2\,dt$ minimal för $A = c_2$, koefficienten i den komplexa fourierserien för $y(t)$. Men då $y(t)$ är den π-periodiska fortsättningen av $x(t)$ är (enligt fs) $c_k = \frac{1}{\pi} X(k\frac{2\pi}{\pi})$, så $c_2 = \frac{1}{\pi} X(4) = \frac{1}{\pi} \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{2}4} + e^{-i\pi 4} - i4}{1 - 4^2} = \frac{3 - 4i}{-15\pi}$.

Svar a., b.: $\boldsymbol{x'(t)}$, $\boldsymbol{x''(t)}$, $\boldsymbol{X(\omega)}$ som ovan, c.: $\boldsymbol{A = \frac{4i-3}{15\pi}}$ ger minimum.

---

5. Vi söker $y(t)$, $t \geq 0$, som för $t > 0$ uppfyller $y(t) + 5\int_0^t e^\tau \cos(2\tau)\,y(t - \tau)\,d\tau = 3\,\delta(t - 1)$.

Lösning:

Eftersom integralen är en (laplace-)faltning ger $\mathcal{L}$-transformering av ekvationen att
$Y(s) + 5\,\mathcal{L}\{e^t \cos(2t)\}\,Y(s) = 3e^{-s}$, så $Y(s)(1 + \frac{5(s-1)}{(s-1)^2 + 2^2}) = Y(s)\frac{s(s+3)}{s^2 - 2s + 5} = 3e^{-s}$.
Det ger att $Y(s) = \frac{s^2 - 2s + 5}{s(s+3)}\,3e^{-s} = \frac{(s^2 + 3s) - 5(s-1)}{s(s+3)}\,3e^{-s} = 3e^{-s} + (\frac{5}{s} - \frac{20}{s+3})\,e^{-s}$. $\mathcal{L}^{-1}$ ger

Svar: $\boldsymbol{y(t) = 3\,\delta(t - 1) + (5 - 20\,e^{-3(t-1)})\,\mathcal{U}(t - 1)}$ för $\boldsymbol{t > 0}$.

---

6. Enligt samplingssatsen kan en funktion $x(t)$ med $X(\omega) = 0$ för $|\omega| \geq \frac{\pi}{T}$ återskapas från den samplade funktionen $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$.
Vi söker resultaten då man försöker återskapa $x(t)$ ur $x_s(t)$ så, men (a.) $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, där $X_1(\omega) = 0$ om $|\omega| \geq \frac{\pi}{T}$ och $X_2(\omega) = 0$ om $|\omega - \frac{2\pi}{T}| \geq \frac{\pi}{T}$ respektive (b.) $X(\omega) = 0$ om $|\omega| \geq \frac{\pi}{2T}$ och värdena blandats samman så att man (i tron att det är $x_s(t)$) använder
$y_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT)$, där $y(nT) = \begin{cases} x((n+1)T), & n \text{ jämnt} \\ x((n-1)T), & n \text{ udda.} \end{cases}$

Lösning:

a. $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, så (med fs) dess fouriertransform $X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\frac{2\pi}{T})$. Om $X(\omega) = 0$ för $|\omega| \geq \frac{\pi}{T}$ fås $X(\omega)$ som T rect $\frac{\omega T}{2\pi} \cdot X_s(\omega)$, men nu får man $Y(\omega) = T$ rect $\frac{\omega T}{2\pi} \cdot X_s(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega + \frac{2\pi}{T})$, så resultatet av försöket att återskapa $x(t)$ blir $y(t) = x_1(t) + e^{-i2\pi\frac{t}{T}} x_2(t)$.

b. Nu har man (i tron att det är $x_s(t)$) [Oj, mycket formler, men faktiskt inte så svårt.]
$y_s(t) = \sum_{n \text{ jämnt}} x((n+1)T)\delta(t - nT) + \sum_{n \text{ udda}} x((n-1)T)\delta(t - nT) =$
$= x(t + T) \cdot \sum_{n \text{ jämnt}} \delta(t - nT) + x(t - T) \cdot \sum_{n \text{ udda}} \delta(t - nT) =$
$= x(t + T) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2kT) + x(t - T) \cdot (\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2kT))$, så
$Y_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}(e^{i\omega T} X(\omega)) * \frac{2\pi}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{2T}) + \frac{1}{2\pi}(e^{-i\omega T} X(\omega)) * (\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) -$
$\frac{2\pi}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{2T})) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - n\frac{\pi}{T})T} X(\omega - n\frac{\pi}{T}) +$
$+ \frac{1}{T}(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - n\frac{2\pi}{T})T} X(\omega - n\frac{2\pi}{T}) - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - n\frac{\pi}{T})T} X(\omega - n\frac{\pi}{T}))$.
P.g.a. villkoret på $X(\omega)$ blir nu $Y(\omega) (= T$ rect $\frac{\omega T}{2\pi} \cdot Y_s(\omega)) = \frac{1}{2} e^{i\omega T} X(\omega) + (1 - \frac{1}{2}) e^{-i\omega T} X(\omega)$,
så $y(t) = \frac{1}{2}(x(t + T) + x(t - T))$.

Svar: Resultaten blir (a.) $\boldsymbol{x_1(t) + e^{-i2\pi\frac{t}{T}} x_2(t)}$ och (b.) $\boldsymbol{\frac{1}{2}(x(t + T) + x(t - T))}$.
