KTH Matematik

Tentamen onsdagen den 20 oktober 2010 för ME, IT (m.fl.)
SF1635(/5B1209), Signaler och system I

Skrivtid: 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook,
"Formelsamling i Signalbehandling" (rosa),
"Formelsamling för Kursen SF1635 etc." (särtryck från kompendiet).

Betygsgränser:

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	FX(/K)	
krävs	40	36	32	28	24	20	poäng (inklusive bonus)

Betygen 5, 4, 3, K gäller kurs 5B1209.
FX(/K) innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Tid och plats för den meddelas vid behov senare.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

1a. (4p) Finn den allmänna lösningen $y(x)$ till differentialekvationen

$$(e^{y+x} - e^{y-x})y' = e^{x+y} + e^{x-y}.$$

b. (3p) Finn en lösning som uppfyller $y(1) = 0$ och ange det största intervallet där den lösningen $y(x)$ kan vara definierad.

2. (7p) Bestäm de funktioner $x(t)$ och $y(t)$ som uppfyller

$$\begin{cases} 6x = 3x' - 2y' \\ 6y = 3x' - 4y' \\ x(0) = 4,\ y(0) = -3. \end{cases}$$

3. Ett visst linjärt tidsinvariant system (LTI-system) är **kausalt**, dvs insignalen $\delta(t)$ ger ett pulssvar $h(t)$ sådant att $h(t) = 0$ då $t < 0$.

Insignalen $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$ ger utsignalen $y(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2\pi \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$

a. (3p) Vad är laplacetransformen $H(s)$ av pulssvaret $h(t)$?

b. (3p) Vad är pulssvaret $h(t)$?

c. (2p) Vad blir utsignalen $y(t)$ då insignalen $x(t) = \begin{cases} \sin t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$?

d. (1p) Vad blir utsignalen $y(t)$ då insignalen $x(t) = \sin t$ för alla t?

Svaren får inte innehålla integraler eller faltningar.

V.g. vänd!

4. Låt

$$x(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi \\ \cos t, & -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}.$$

a. (4p) Bestäm de generaliserade derivatorna $x'(t)$ och $x''(t)$.
b. (4p) Använd $x(t) + x''(t)$ för att bestämma fouriertransformen $X(\omega)$.
c. (3p) Låt $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - n\pi)$ vara den π-periodiska fortsättningen för $x(t)$ och finn det (komplexa) tal A som gör $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |y(t) - A\, e^{i4t}|^2\, dt$ minimal (du behöver inte bestämma integralens minimala värde).

5. (8p) Finn $y(t),\ t \geq 0$, som för $t > 0$ uppfyller

$$y(t) + 5 \int_0^t e^{\tau} \cos(2\tau)\, y(t - \tau)\, d\tau = 3\, \delta(t - 1).$$

($\delta(t)$ betecknar här, som vanligt, Diracs deltafunktion.)

6. Samplingssatsen säger som bekant att om en funktion $x(t)$ har fouriertransform $X(\omega)$ med

$$X(\omega) = 0 \text{ för } |\omega| \geq \frac{\pi}{T}$$

(dvs $\mathcal{X}(f) = 0$ för $f \geq \frac{1}{2T}$) kan $x(t)$ återskapas från den samplade funktionen

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

a. (4p) Om man av misstag tar samplingspunkterna för glest och försöker återskapa $x(t)$ från $x_s(t)$ som ovan, vilket resultat får man om i själva verket $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, där $X_1(\omega) = 0$ om $|\omega| \geq \frac{\pi}{T}$ och $X_2(\omega) = 0$ om $\omega \leq \frac{\pi}{T}$ eller $\omega \geq \frac{3\pi}{T}$?
b. (4p) Om man för säkerhets skull tar samplingspunkterna extra tätt, men (utan att märka det) råkar blanda ihop värdena för udda och jämna n, vilket resultat får man då i stället för $x(t)$?
Nu gäller att $X(\omega) = 0$ för $|\omega| \geq \frac{\pi}{2T}$ och sammanblandningen sker så, att man (i tron att den är $x_s(t)$) som samplad funktion använder

$$y_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT), \text{ där } y(nT) = \begin{cases} x((n+1)T), & n \text{ jämnt} \\ x((n-1)T), & n \text{ udda.} \end{cases}$$

Uppgifterna a. och b. kan lösas oberoende av varandra.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.