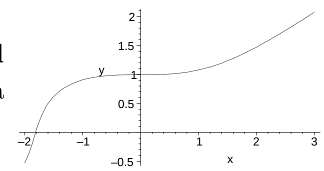
Matematik, KTH
B.Ek

Lösningsförslag tenta SF1635(/5B1209), Signaler och system I, 14 december 2010

1. $y(x)$ bestäms för alla x av $y' = \frac{x^2}{3y^2+1}$, $y(0) = 1$. Vi söker (a) ett samband (utan derivator och integraler) mellan x och $y(x)$ och (b) x_0 så att $y(x_0) = 2$.

Lösning:



Ekvationen är separabel. Man finner $(3y^2+1)y' = x^2$ och med integration $y^3 + y = \frac{x^3}{3} + C$, C konstant. $y(0) = 1$ ger $C = 2$, så $x^3 = 3(y^3 + y - 2)$. $y = 2$ ger $x^3 = 3 \cdot 8 = 24$.
Svar: Det sökta värdet är $x_0 = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$.

---

2. Med $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} \\ (-1-3t)e^{-t} \end{pmatrix}$ söker vi (a) $\mathbf{x}(t)$ som uppfyller $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, (b) en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t)$ för $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ och (c) den allmänna lösningen $\mathbf{x}(t)$ till $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$.

Lösning:

Alternativ 1, med egenvektorer etc. Först finner vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer:
$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1)$, så $\lambda_{1,2} = 3, -1$.
Egenvektor till $\lambda_1 = 3$: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Egenvektor till $\lambda_2 = -1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Den allmänna lösningen blir $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ och en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & -3e^{-t} \end{pmatrix}$. den sökta lösningen bestäms av begynnelsevillkoret, $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, så $c_1 = 1$, $c_2 = -2$.
För den inhomogena ekvationen använder vi variation av parametrar. Med $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t)$ blir ekvationen $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t)$, så $\mathbf{u}' = \mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \frac{1}{-2e^{2t}}\begin{pmatrix} -3e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix}\mathbf{f}(t) =$
$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{t} & -\frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} \\ (-1-3t)e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ t \end{pmatrix}$, så $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{-4t} + c_1 \\ \frac{t^2}{2} + c_2 \end{pmatrix}$ och allmänna lösningen
$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Svar a: Lösningen är $x(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, b: En fundamentalmatris är $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & -3e^{-t} \end{pmatrix}$, c: Den allmänna lösningen är $\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $c_{1,2}$ godtyckliga konstanter.
Alternativ 2, med laplacetransform.
$\mathcal{L}$-transformation av ekvationen (med begynnelsevillkor) ger $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{x}_0(+\mathbf{F}(s))$, där $\mathbf{F}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{f}(t)\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \\ -\frac{1}{s+1} - \frac{3}{(s+1)^2} \end{pmatrix}$. I a. fås $\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$, i b. $\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$ och i c. $\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{F}(s))$. Svaren som ovan.

---

3. Vi söker värdet av integralen $\int_0^\infty e^{-3x}\int_0^x \sin(4(y-7))\,\mathcal{U}(y-7)\,e^{-2(x-y)}\cos(5(x-y))\,dy\,dx$.

Lösning:

Om man bortser från namnen på variablerna, ser man att det sökta värdet är $F(3)$, där $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ och $f(t) = (g * h)(t)$ ("Laplacefaltning"), $g(t) = \sin(4(t-7))\mathcal{U}(t-7)$ och $h(t) = e^{-2t}\cos(5t)$. Man får $F(s) = G(s) \cdot H(s)$ med $G(s) = e^{-7s}\frac{4}{s^2+4^2}$ och $H(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+5^2}$. Det ger $F(3) = e^{-7\cdot 3}\frac{4}{3^2+4^2} \cdot \frac{3+2}{(3+2)^2+5^2} = \frac{2e^{-21}}{125}$. (Alternativt kan man byta integrationsordning i dubbelintegralen.)

Svar: Integralens värde är $\frac{2e^{-21}}{125}$.

---

4. $x'(t)$ är $\delta(t) + e^{\pi}\delta(t-\pi) + \begin{cases} 2e^t \cos t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{för övrigt,} \end{cases}$ och $x(-\pi) = 0$. Vi söker (a) $x(t)$, (b) $x''(t)$ och (c) $x''(t) - 2x'(t) + 2x(t)$ och med hjälp av den fouriertransformen $X(\omega)$.

Lösning:

δ-funktionerna visar att $x(0+) - x(0-) = 1$ och $x(\pi+) - x(\pi-) = e^{\pi}$. Då $t < 0$ är $x(t)$ primitiv funktion till 0 och $x(-\pi) = 0$, så $x(t) = 0$ för $t < 0$ och $x(0-) = 0$. För $0 < t < \pi$ är $x(t)$ primitiv funktion till $2e^t \cos t$ och $x(0+) = 1$. $\int 2e^t \cos t\, dt = \operatorname{Re} \int 2e^{(1+i)t} dt = \operatorname{Re} \frac{2e^{(1+i)t}}{1+i} + C = e^t(\cos t + \sin t) + C$. Det ger $x(0+) = 1 + C$, så $C = 0$ och då $x(\pi-) = -e^{\pi}$. För $t > \pi$ är $x(t)$ primitiv funktion till 0 och $x(\pi+) = 0$, så $x(t) = 0$ för $t > \pi$.
Man får $x''(t) = \delta'(t) + e^{\pi}\delta'(t-\pi) + \{\{x'(t)\}'\} + 2\delta(t) + 2e^{\pi}\delta(t-\pi) = \delta'(t) + e^{\pi}\delta'(t-\pi) + 2\delta(t) + 2e^{\pi}\delta(t-\pi) + \begin{cases} 2e^t(\cos t - \sin t), & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$.
Insättning ger $x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = \delta'(t) + e^{\pi}\delta'(t-\pi) + 2\delta(t) + 2e^{\pi}\delta(t-\pi) - 2\delta(t) - 2e^{\pi}\delta(t-\pi) + \begin{cases} 2e^t(\cos t - \sin t) - 2 \cdot 2e^t \cos t + 2e^t(\cos t + \sin t), & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases} = \delta'(t) + e^{\pi}\delta'(t-\pi)$.
Således $x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) \xmapsto{\mathcal{FT}} (-\omega^2 - 2i\omega + 2)X(\omega) = i\omega + i\omega e^{\pi} e^{-i\pi\omega}$.

Svar a. $\boldsymbol{x(t) = \begin{cases} e^t(\cos t + \sin t), & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{för övrigt,} \end{cases}}$,

b. $\boldsymbol{x''(t) = \delta'(t) + e^{\pi}\delta'(t-\pi) + 2\delta(t) + 2e^{\pi}\delta(t-\pi) + \begin{cases} 2e^t(\cos t - \sin t), & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{för övrigt,} \end{cases}}$,

c. $\boldsymbol{x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = \delta'(t) + e^{\pi}\delta'(t-\pi)}$ **och** $\boldsymbol{X(\omega) = \frac{i\omega(1 + e^{\pi(1-i\omega)})}{-\omega^2 - 2i\omega + 2}}$.

---

5. Vi söker alla $y(t)$ (kontinuerliga och av exponentiell typ, med $y'(t)$ styckvis kontinuerlig och) med $y(0) = 0$ som uppfyller $y'(t) + \int_0^t e^{2\tau} y(t-\tau)\, d\tau = 2(\cos t - \sin t)$.

Lösning:

Laplacetransformering ger (med givna villkoren på y) $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t e^{2\tau} y(t-\tau)\, d\tau\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s-2}Y(s)$ (ty en "laplacefaltning") och $\mathcal{L}\{2(\cos t - \sin t)\} = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$.
Man får ekvationen $sY(s) + \frac{1}{s-2}Y(s) = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$, dvs $\frac{s^2-2s+1}{s-2}Y(s) = \frac{2(s-1)}{s^2+1}$, så
$Y(s) = \frac{2(s-2)}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{s+3}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}$ (partialbråksuppdelning) och
Svar: $\boldsymbol{y(t) = \cos t + 3\sin t - e^t}$ **är den enda sådana funktionen.**

---

6. Vi vet att $x(t) = 0$ om $|t| \geq 3\pi$, att $y(t) = 0$ om $|t| \geq \pi$ och att $X(n) = Y(n)$ för alla heltal n. Vi skall uttrycka $y(t)$ med hjälp av $x(t)$:s värden.

Lösning:

Vi får $X(\omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n)\delta(\omega - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(n)\delta(\omega - n) = Y(\omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n)$. Men (fs) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n2\pi) \xmapsto{\mathcal{FT}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n)$, så inverstransformering ger $x_{2\pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - n2\pi) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n2\pi) = y(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - n2\pi) = y_{2\pi}(t)$. $x(t)$ och $y(t)$ har alltså samma 2π-periodiska fortsättning. (Det kan alternativt ses av att (fs) $x_{2\pi}(t)$ har fourierkoefficienter $c_n = \frac{1}{2\pi}X(n)$.)
För $|t| < \pi$ är $y(t) = y_{2\pi}(t)$ och $x_{2\pi}(t) = x(t - 2\pi) + x(t) + x(t + 2\pi)$ (övriga termer är 0), så
Svar: $\boldsymbol{y(t) = x(t - 2\pi) + x(t) + x(t + 2\pi)}$ **för** $\boldsymbol{|t| < \pi}$**, 0 annars.**
