Matematik, KTH

Tentamen tisdagen den 14 december 2010 för E (m.fl.)
SF1635(/5B1209), Signaler och system I

Skrivtid: 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.
Tillåtna hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook,
"Formelsamling i Signalbehandling" (rosa),
"Formelsamling för Kursen SF1635 etc." (särtryck från kompendiet).

Betygsgränser:

För betyg	A(/5)	B	C(/4)	D	E(/3)	FX(/K)	
krävs	40	36	32	28	24	20	poäng (inklusive bonus)

Betygen 5, 4, 3, K gäller kurs 5B1209.
FX(/K) innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E(/3). Tid och plats för den meddelas vid behov senare.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

1. Funktionen $y(x)$ bestäms för alla x av $\begin{cases} y' = \frac{x^2}{3y^2+1} \\ y(0) = 1. \end{cases}$

a. (5p) Finn $y(x)$ på implicit form, dvs sök ett samband (utan derivator och integraler) mellan x och $y(x)$ som bestämmer $y(x)$.

b. (2p) Finn x_0 så att $y(x_0) = 2$.

2. Låt $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} \\ (-1-3t)e^{-t} \end{pmatrix}$.

a. (4p) Finn $\mathbf{x}(t)$ som uppfyller $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}(0) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$.

b. (3p) Finn en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t)$ för $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

c. (4p) Finn den allmänna lösningen $\mathbf{x}(t)$ till ekvationen $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$.
$\mathbf{x}'$ står förstås för $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$.

3. (6p) Bestäm värdet av integralen

$$\int_0^\infty e^{-3x} \int_0^x \sin(4(y-7))\,\mathcal{U}(y-7)\,e^{-2(x-y)}\cos(5(x-y))\,dy\,dx.$$

Svaret får inte innehålla integraler eller faltningar. $\mathcal{U}$ betecknar Heavisides stegfunktion.

V.g. vänd!

4. Låt $x(t)$ uppfylla $x(-\pi) = 0$ och ha (den generaliserade) derivatan

$$x'(t) = \delta(t) + e^{\pi}\delta(t-\pi) + \begin{cases} 2e^t \cos t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{för övrigt,} \end{cases}$$

där $\delta(t)$ som vanligt betecknar Diracs deltafunktion.

a. (4p) Bestäm $x(t)$.

b. (3p) Bestäm $x''(t)$.

c. (4p) Bestäm $x''(t) - 2x'(t) + 2x(t)$ och använd den för att finna $x(t)$:s fouriertransform $X(\omega)$.

5. (8p) Finn alla $y(t)$, $t \geq 0$ (kontinuerliga och av exponentiell typ, med $y'(t)$ styckvis kontinuerliga), som uppfyller

$$\begin{cases} y'(t) + \int_0^t e^{2\tau} y(t-\tau)\, d\tau = 2(\cos t - \sin t) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

6. (7p) Funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ är sådana att

$$x(t) = 0 \text{ om } |t| \geq 3\pi \quad \text{och} \quad y(t) = 0 \text{ om } |t| \geq \pi.$$

Dessutom gäller för deras fouriertransformer $X(\omega)$, $Y(\omega)$ att

$$X(n) = Y(n) \text{ för alla heltal } n.$$

Uttryck $y(t)$ med hjälp av $x(t)$:s värden.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.