Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1635, Signaler och system I
Tentamen den 21 oktober 2011. Lösningsförslag.

(5p) **1.** (a) Finn allmänna lösningen till ekvationen

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + xy(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

(2p) (b) Finn lösningen som uppfyller $y(0) = 2$.

Lösning.

(a) Det är en linjär ekvation. Vi skriver om den i form

$$y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

och hittar integrerande faktorn

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{x}{x^2+1}dx\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) = \sqrt{x^2+1}.$$

Efter multiplikation med den ekvationen blir

$$y'\sqrt{x^2+1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

eller

$$\frac{d}{dx}(y\sqrt{x^2+1}) = 1.$$

Integrering ger

$$y\sqrt{x^2+1} = x + C$$

och

$$y = \frac{x+C}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(b) Insättningen av begynnelsevillkor $y(0) = 2$ ger oss $C = 2$ och vi får

$$y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. En funktion $y(t)$ är definierad och deriverbar för $t \geq 0$. Den uppfyller integralekvation

$$y(t) = te^{-t} + 2\int_0^t y'(\tau)e^{\tau-t}\,d\tau.$$

(2p) (a) Bestäm $y(0)$.

(6p) (b) Bestäm $y(t)$ för $t \geq 0$.

Lösning.

(a) Insättning av $t = 0$ till ekvationen ger oss

$$y(0) = 0 + 2\int_0^0 y'(\tau)e^{\tau - t}\,d\tau = 0.$$

(b) Låt $Y(s)$ vara Laplacetransform av $y(t)$. Vi observerar att integralen i högerled av ekvationen är faltningen av $y'(t)$ och e^{-t}. Vi tar nu Laplacetransform av ekvationen och vi får

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + 2sY(s)\frac{1}{s+1}.$$

Detta ger oss

$$Y(s) = \frac{-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/2}{s-1}.$$

Invers Laplacetransform ger oss

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t}.$$

3. Funktionen

$$f(t) = \frac{e^{-t^2}}{2 + t^2 - \cos t}$$

har fouriertransformen $F(\omega) = g(\omega)$.

(2p) (a) Vad är fouriertransformen $G(\omega)$ av funktionen $g(t)$?

(6p) (b) Vad är fouriertransformen $H(\omega)$ av funktionen

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{3i\tau} g(2\tau) g(t - \tau + 1)\,d\tau?$$

Svaren får inte innehålla integraler. Funktionerna $g(t)$ och $h(t)$ behöver inte bestämmas.

Lösning. (a) Eftersom invers Fouriertransform av g är f, vi har

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega')e^{it\omega'}\,\frac{d\omega'}{2\pi} = f(t).$$

Fouriertransformen av g blir då

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-it\omega}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega')e^{-i\omega'\omega}\frac{d\omega'}{2\pi}\cdot 2\pi = 2\pi f(-\omega) = \frac{2\pi e^{-\omega^2}}{2 + \omega^2 - \cos\omega}.$$

(b) Funktionen h är faltningen av funktioner $e^{3it}g(2t)$ och $g(t+1)$. Enligt standarda egenskaper hos Fouriertransform, funktionen $g(2t)$ har transformen $\frac{1}{2}G(\omega/2)$ och funktionen $e^{3it}g(2t)$ har transformen

$$\frac{1}{2}G((\omega - 3)/2) = \frac{\pi e^{-\left(\frac{\omega-3}{2}\right)^2}}{2 + \left(\frac{\omega-3}{2}\right)^2 - \cos\left(\frac{\omega-3}{2}\right)}.$$

Funktionen $g(t+1)$ har Fouriertransformen $e^{i\omega}G(\omega)$. Till slut, funktionen h har Fouriertransformen som är produkt

$$\frac{1}{2}G((\omega - 3)/2)\cdot e^{i\omega}G(\omega) = \frac{2\pi^2 e^{i\omega - \omega^2 - \left(\frac{\omega-3}{2}\right)^2}}{(2 + \omega^2 - \cos\omega)(2 + \left(\frac{\omega-3}{2}\right)^2 - \cos\left(\frac{\omega-3}{2}\right))}.$$

(4p) **4.** Funktionen $x(t)$ är definierad på intervallet $[-2,2]$ med formeln

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , -2 \le t < 0; \\ t - t^2 & , 0 \le t < 1; \\ 0 & , 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

(3p) (a) Bestäm de generaliserade derivatorna $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$.

(3p) (b) Använd $x'''(t)$ för att bestämma fouriertransform $X(\omega)$ av funktionen $x(t)$.

(3p) (c) Bestäm komplexa fourierserien för 4-periodiska fortsättningen av $x(t)$.

Lösning.

(a) Svar:

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & , -2 \le t < 0; \\ 1 - 2t & , 0 \le t < 1; \\ 0 & , 1 \le t \le 2. \end{cases} ;$$

$$x''(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \begin{cases} 0 & , -2 \le t < 0; \\ -2 & , 0 \le t < 1; \\ 0 & , 1 \le t \le 2. \end{cases} ;$$

$$x'''(t) = \delta'(t) + \delta'(t-1) - 2\delta(t) + 2\delta(t-1).$$

(b) Vi har

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-it\omega} dt = \frac{i}{\omega^3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\delta'(t) + \delta'(t-1) - 2\delta(t) + 2\delta(t-1)) e^{-it\omega} dt \right) =$$

$$= \frac{i}{\omega^3} \left(i\omega + i\omega e^{-i\omega} - 2 + 2e^{-i\omega} \right).$$

(c) 4-periodiska fortsättningen av $x(t)$ motsvarar till sampling av $\frac{1}{4}X(\omega)$ i punkter $\omega_n = \frac{\pi n}{2}$. Detta ger oss Fourierserien

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega_n^3} \left(i\omega_n + i\omega_n e^{-i\omega_n} - 2 + 2e^{-i\omega_n} \right) e^{i\omega_n t},$$

där $\omega_n = \frac{\pi n}{2}$.

(8p) **5.** Ett LTI (d v s linjärt tidsinvariant) system har pulssvaret

$$h(t) = e^{-i\pi t} \mathrm{sinc}\big(4(t-3)\big).$$

Vad blir utsignalen $y(t)$ då insignalen är $x(t) = \mathrm{sinc}(4t)$?

Här $\mathrm{sinc}(t)$ betecknar *sinus cardinalis* d v s

$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t} & , \ t \neq 0; \\ 1 & , \ t = 0. \end{cases}$$

Lösning.

För utsignalen $y(t)$ gäller det att dess Fouriertransform $Y(\omega)$ är $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$, där H, X är Fouriertransformer av h, x. Vi söker dem först.

Funktionen $x(t) = \text{sinc}(4t)$ transformeras till $X(\omega) = \frac{1}{4}\text{rect}_{8\pi}(\omega)$, där

$$\text{rect}_a(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < a/2; \\ 0, & |\omega| \geq a/2. \end{cases}$$

Detta ger oss Fouriertransform $H(\omega)$ av $h(t)$

$$H(\omega) = \frac{1}{4}e^{-3i(\omega+\pi)}\text{rect}_{8\pi}(\omega + \pi) = -\frac{1}{4}e^{3i\omega} \cdot \begin{cases} 1, & -5\pi < \omega < 3\pi; \\ 0, & \omega \leq -5\pi \text{ eller } \omega \geq 3\pi. \end{cases}$$

För $Y(\omega)$ vi får

$$Y(\omega) = -\frac{1}{16}e^{-3i\omega} \cdot \begin{cases} 1, & -4\pi < \omega < 3\pi; \\ 0, & \omega \leq -4\pi \text{ eller } \omega \geq 3\pi. \end{cases} = -\frac{1}{16}e^{-3i\omega}\text{rect}_{7\pi}(\omega + \pi/2).$$

Detta ger oss

$$y(t) = \frac{7i}{32}e^{-i\pi t/2}\text{sinc}\left(3.5(t-3)\right).$$

6. En signal $x(t)$ samplas med ett sampelavstånd på $T = 0.2$ millisekunder d v s man avläser värdena $x(nT)$ för alla heltal n.

(2p) (a) Vilket samband råder mellan fouriertransformerna $X(f)$ och $Y(f)$ för $x(t)$ och motsvarande sampelfunktion

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)\,?$$

Frekvensvariabeln f mäts i Hz.

(2p) (b) För en viss signal $x_0(t)$ är sampelvärdena $x_0(nT) = 0$ för alla heltal n, utom för $n = 10$ då sampelvärdet är $=\ 0.1$. Bestäm $Y(f)$.

(3p) (c) Man får veta att signalen $x_0(t)$ dessutom är bandbegränsad med bandbredden 2.5kHz, d v s för signalens fouriertransform $X(f)$ gäller att $X(f) = 0$ om $|f| > 2500$, f mätt i Hz. Vilket samband gäller mellan $X(f)$ och $Y(f)$ då $|f| < 2500$?

(3p) (d) Bestäm $x_0(t)$ med hjälp av svaren i uppgifter (b) och (c).

Svaren till (b), (c) får inte innehålla integraler eller serier. Motivera svaren noga.

Lösning.

(a) Svar:

$$Y(f) = 5000\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - 5000).$$

(b) Samplad signal blir det $y(t) = 0.1\delta(t - 0.002)$ vilket ger $Y(f) = 0.1e^{-0.002\cdot 2\pi i f}$.

(c) Eftersom $Y(f)$ ges som 5000-periodiska fortsättningen av $5000X(f)$, vi har $Y(f) = 5000X(f)$ då $|f| < 2500$.

(d) Från (b) och (c) får vi

$$X(f) = 0.1e^{-0.002\cdot 2\pi i f}\text{rect}_{5000}(f).$$

Detta ger oss

$$x(t) = 500\text{sinc}\left(5000(t - 0.002)\right).$$