Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1635, Signaler och system I

Tentamen, fredagen den 21 oktober 2011 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtna hjälpmedel är formelsamlingen BETA samt utdelade formelsamlingarna.

För godkänd (betyg E) krävs minst 24 poäng. Betygsgränserna för övriga betyg är 28p för D, 32p för C, 36p för B samt 40p för A. Den som får 22p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget E. Kontakta i så fall läraren!

L Y C K A   T I L L !

(5p) **1.** (a) Finn allmänna lösningen till ekvationen

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + xy(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

(2p) (b) Finn lösningen som uppfyller $y(0) = 2$.

2. En funktion $y(t)$ är definierad och deriverbar för $t \geq 0$. Den uppfyller integralekvation

$$y(t) = te^{-t} + 2\int_0^t y'(\tau)e^{\tau - t}\, d\tau.$$

(2p) (a) Bestäm $y(0)$.

(6p) (b) Bestäm $y(t)$ för $t \geq 0$.

3. Funktionen

$$f(t) = \frac{e^{-t^2}}{2 + t^2 - \cos t}$$

har fouriertransformen $F(\omega) = g(\omega)$.

(2p) (a) Vad är fouriertransformen $G(\omega)$ av funktionen $g(t)$?

(6p) (b) Vad är fouriertransformen $H(\omega)$ av funktionen

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{3i\tau} g(2\tau) g(t - \tau + 1)\, d\tau?$$

Svaren får inte innehålla integraler. Funktionerna $g(t)$ och $h(t)$ behöver inte bestämmas.

VÄND!

4. Funktionen $x(t)$ är definierad på intervallet $[-2, 2]$ med formeln

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \ -2 \le t < 0; \\ t - t^2 & , 0 \le t < 1; \\ 0 & , 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

(3p) (a) Bestäm de generaliserade derivatorna $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$.

(3p) (b) Använd $x'''(t)$ för att bestämma fouriertransform $X(\omega)$ av funktionen $x(t)$.

(3p) (c) Bestäm komplexa fourierserien för 4-periodiska fortsättningen av $x(t)$.

(8p) **5.** Ett LTI (d v s linjärt tidsinvariant) system har pulssvaret

$$h(t) = e^{-i\pi t}\mathrm{sinc}(4(t-3)).$$

Vad blir utsignalen $y(t)$ då insignalen är $x(t) = \mathrm{sinc}(4t)$?

Här $\mathrm{sinc}(t)$ betecknar *sinus cardinalis* d v s

$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t} & , \ t \neq 0; \\ 1 & , \ t = 0. \end{cases}$$

6. En signal $x(t)$ samplas med ett sampelavstånd på $T = 0.2$ millisekunder d v s man avläser värdena $x(nT)$ för alla heltal n.

(2p) (a) Vilket samband råder mellan fouriertransformerna $X(f)$ och $Y(f)$ för $x(t)$ och motsvarande sampelfunktion

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)\,?$$

Frekvensvariabeln f mäts i Hz.

(2p) (b) För en viss signal $x_0(t)$ är sampelvärdena $x_0(nT) = 0$ för alla heltal n, utom för $n = 10$ då sampelvärdet är $=\ 0.1$. Bestäm $Y(f)$.

(3p) (c) Man får veta att signalen $x_0(t)$ dessutom är bandbegränsad med bandbredden 2.5kHz, d v s för signalens fouriertransform $X(f)$ gäller att $X(f) = 0$ om $|f| > 2500$, f mätt i Hz. Vilket samband gäller mellan $X(f)$ och $Y(f)$ då $|f| < 2500$?

(3p) (d) Bestäm $x_0(t)$ med hjälp av svaren i uppgifter (b) och (c).

Svaren till (b), (c) får inte innehålla integraler eller serier. Motivera svaren noga.