SF1635, Signaler och system I

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2011–12–19

---

1) Lösning

Om vi sätter $y' = z$ och $x \neq 0$ ($x = 0$ irrelevant) får vi

$$z' + \frac{2}{x}z = \frac{6}{x}$$

som har en integrerande faktor $p(x) = x^2$ Detta leder till

$$(zp)' = \left(zx^2\right)' = 6x \longrightarrow z = \frac{C_1}{x^2} + 3 = y'$$

Vi får alltså

$$y = 3x - \frac{C_1}{x} + C_2$$

Insättning av begynnelsevärden ger $C_1 = 1, C_2 = 2$ och svaret blir

$$\boxed{\begin{array}{c} y = 3x - \dfrac{1}{x} + 2,\ -\infty < x < 0, \\ \text{d v s största intervallet, som lösningen kring } x = -1 \text{ är definierad i, är } x < 0 \end{array}}$$

---

2) Lösning

Laplace–transformering av ekv(2) i texten ger

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2+4}Y(s) + e^{-3s},$$

så

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{\frac{2}{s^3} + e^{-3s}}{1 - \frac{2}{s^2+4}} = \frac{s^2+4}{s^2+2}\left(\frac{2}{s^3} + e^{-3s}\right) = \\
&= \left(1 + \frac{2}{s^2+2}\right)\left(\frac{2}{s^3} + e^{-3s}\right) = \\
&= \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^3(s^2+2)} + \left(1 + \frac{2}{s^2+2}\right)e^{-3s} = \\
&= \frac{4}{s^3} + \frac{s}{s^2+2} - \frac{1}{s} + \left(1 + \frac{2}{s^2+2}\right)e^{-3s} = \\
&= F(s) + G(s)e^{-3s}
\end{aligned}$$

Enkel tabellslagning(Beta/rosa FS) ger snabbt vid handen att

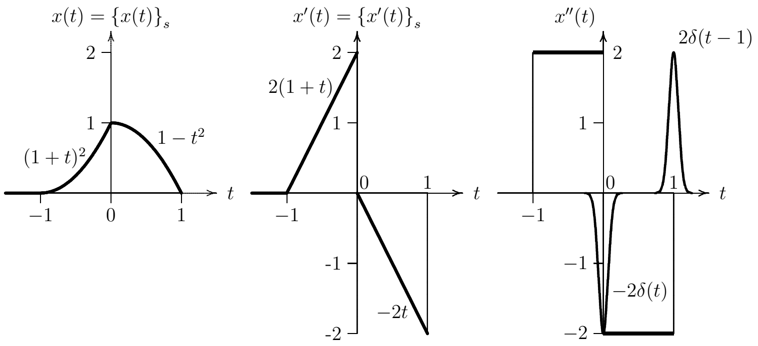
$$\begin{aligned}
F(s) &\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} f(t) = 2t^2 + \cos(t\sqrt{2}) - 1 \\
G(s) &\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} g(t) = \delta(t) + \sqrt{2}\sin(t\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Med hänsyn tagen till fördröjningen ”e^{-3s}” får vi slutligen svaret:

$$\boxed{y(t) = (2t^2 - 1 + \cos(t\sqrt{2}))\,\mathcal{U}(t) + \delta(t-3) + (\sqrt{2}\sin((t-3)\sqrt{2}))\,\mathcal{U}(t-3)}$$

3) Lösning

a) Först skall påpekas att $\{x(t)\}_s$, $\{x'(t)\}_s$, $\{x''(t)\}_s$ betyder den styckvis kontinuerliga delen av $x(t), x'(t), x''(t)$, vilket inte innebär något speciellt för våra x och x'. Tittar man däremot på $x''(t)$ ser vi att här tillkommer de s k generaliserade derivatorna i $t = 0$ och $t = 1$.
Resultaten blir alltså, jämför med figuren,



$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \{x'(t)\}_s = \begin{cases} -2t, & 0 < t \leq 1; \\ 2+2t, & -1 \leq t \leq 0; \\ 0, & 1 < |t|. \end{cases} \\
x''(t) &= -2\delta(t) + 2\delta(t-1) + \{x''(t)\}_s = \\
&= -2\delta(t) + 2\delta(t-1) + \begin{cases} -2, & 0 < t \leq 1; \\ 2, & -1 \leq t \leq 0; \\ 0, & 1 < |t|. \end{cases}
\end{aligned}
$$

b) Vi börjar med Fourier-integralen

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}d\omega \tag{1}$$

och deriverar 2 ggr m a p t och får, se även Beta t ex ,

$$\mathscr{F}[x''(t)](\omega) = (j\omega)^2 X(\omega) \tag{2}$$

Transformerar vi $x''(t)$ enligt ekv(1) så ger oss ekv(2), efter division med $(j\omega)^2$, den sökta transformen $X(\omega)$ av $x(t)$.
Rent formellt och utan krav på elegans studerar vi

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[x''(t)](\omega) &= \int_{-1}^{1} x''(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt \\
&= 2\int_{0}^{1}(-2)(-j)\sin(\omega t)dt + 2\int_{-\varepsilon}^{1+\varepsilon}(-\delta(t) + \delta(t-1))\mathrm{e}^{-j\omega t}dt \qquad (3) \\
&= \frac{4j}{\omega}(1-\cos\omega) - 2\cdot 1 + 2\mathrm{e}^{-j\omega} = (j\omega)^2 X(\omega),\ \omega \neq 0 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

där vi utnyttjade funktionens udda symmetri i första integralen av ekv(3), samt ekv(2) i sista ledet av ekv(4).
För $\omega = 0$ beräknar vi

$$X(0) = \int_{-1}^{0} (1+t)^2 dt + \int_{0}^{1} 1 - t^2 dt = \cdots = 1$$

som leder till svaret

$$\boxed{X(\omega) = -\frac{2}{\omega^2}\left(\frac{2j}{\omega}(1-\cos\omega) - 1 + \mathrm{e}^{-j\omega}\right),\ \omega \neq 0,\ X(0) = 1}$$

---

4) Lösning

Sätt $P(x,y) = x(5-x-y)$ och $Q(x,y) = y(-2+x)$
Kritiska punkter erhålls ur ekvationssystemet

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 0 = x(5-x-y) \\ Q(x,y) &= 0 = y(-2+x) \end{aligned}$$

som har lösningarna $(0,0), (5,0)$ och $(2,3)$
Derivation ger Jacobimatrisen

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} P'_x = 5-2x-y & P'_y = -x \\ Q'_x = y & Q'_y = -2+x \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

som har reella egenvärden med olika tecken, m a o (0,0) är en sadelpunkt och därmed instabil.

$$\mathbf{J}(5,0) = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

som har reella egenvärden med olika tecken, m a o (5,0) är en sadelpunkt och därmed instabil.

$$\mathbf{J}(2,3) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

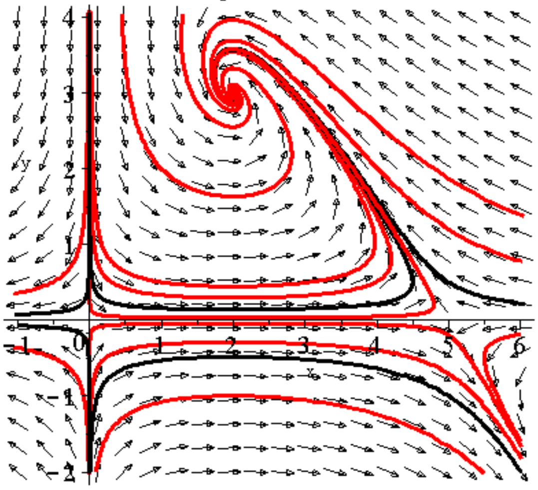
som leder oss till det karakteristiska polynomet

$$p(\lambda) = |\mathbf{J}(2,3) - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 6 = (\lambda+1)^2 + 5 = 0$$

Eftersom egenvärden är komplexa och lika med $-1 \pm i\sqrt{5}$ blir slutsatsen att (2,3) är en stabil spiralpunkt.
Vi får härmed svaret

De kritiska punkterna (0,0) och (5,0) är sadelpunkter och instabila, samt den kritiska punkten (2,3) är en stabil spiralpunkt.

Fasporträtt tal 4

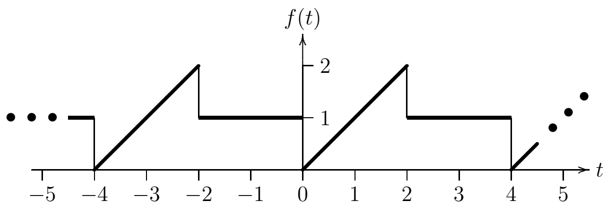


5) Lösning

Vi har 3 metoder att välja på för att lösa problemet:

- Metod I: Derivering av $f(t), c_n \to a_0, a_n, b_n$
- Metod II:Klassisk beräkning av a_0, a_n, b_n
- Metod III: Med hjälp av Fourier–transformen av en periodisk funktion.

a) Metod I:



$f(t)$ utvidgas till en 4-periodisk funktion $f(t)$, som vi i diskontinuitetspunkterna definierar så att $f(t) = \frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$ för alla t, d v s $f(0) = \frac{1}{2}$. Då gäller för alla t att

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{in\omega_0 t} \quad \text{med} \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{1per} f(t)\mathrm{e}^{-in\omega_0 t} dt$$

Ur figuren tar vi direkt $c_0 = 1 = \frac{a_0}{2}$ och för derivatan får vi

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (in\omega_0)\mathrm{e}^{in\omega_0 t} = -\delta(t+2) - \delta(t) - \delta(t-2) + \begin{cases} 1, & 0 < t < 2; \\ 0, & -2 < t < 0). \end{cases}$$

och

$$f''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (in\omega_0)^2 \mathrm{e}^{in\omega_0 t} = -\delta'(t+2) - \delta'(t) - \delta'(t-2) + \delta(t) - \delta(t-2)$$

då blir för $n \neq 0$ och $c_0 = 1$ enligt ovan

$$\begin{aligned}
c_n(in\omega_0)^2 &= \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{3} (-\delta'(t) - \delta'(t-2) + \delta(t) - \delta(t-2))\mathrm{e}^{-in\omega_0 t}\right] dt \\
&= \frac{1}{4}\left[-in\omega_0 - in\omega_0 \mathrm{e}^{-in2\omega_0} + 1 - \mathrm{e}^{-in2\omega_0}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[in\omega_0\left(-1 - \mathrm{e}^{-in\pi}\right) + 1 - \mathrm{e}^{-in\pi}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[in\omega_0\left(-1 - (-1)^n\right) + 1 - (-1)^n\right] \\
c_n &= i\,\frac{1+(-1)^n}{4n\omega_0} + \frac{1-(-1)^n}{4(in\omega_0)^2} = \cdots = \begin{cases} \dfrac{i}{n\pi}, & \text{n..jämn ;} \\ -\dfrac{2}{(n\pi)^2}, & \text{n..udda.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Nu kan vi bestämma de reella koefficienterna a_n och b_n:

$$a_n = 2\,\mathbf{Re}[c_n] = -\frac{4}{(n\pi)^2},\ n = 2k+1,\ k = 0, 1, 2, ... \tag{5}$$

$$b_n = -2\,\mathbf{Im}[c_n] = -\frac{2}{n\pi},\ n = 2k,\ k = 1, 2, 3, ... \tag{6}$$

och vi får svaret

$$\boxed{f(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\pi(k+1/2)t}{(2k+1)^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi k t}{k}}$$

Metod II

Då gäller för alla t att

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi t}{2} + b_n \sin\frac{n\pi t}{2}\right], \tag{7}$$

där

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{0} dt + \frac{1}{4}\int_{0}^{2} t\,dt = 1, \tag{8}$$

medan för $n > 0$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{0} \cos\frac{n\pi t}{2}\,dt + \frac{2}{4}\int_{0}^{2} t\,\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt = \cdots = \\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos\pi n - 1) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{n jämn;} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & \text{n udda.} \end{cases} \qquad (9) \\
b_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{0} \sin\frac{n\pi t}{2}\,dt + \frac{2}{4}\int_{0}^{2} t\,\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = \cdots = \\
&= -\frac{1}{n\pi}(1 + \cos n\pi) = -\frac{1}{n\pi}\left[1 + (-1)^n\right] = \begin{cases} -\dfrac{2}{n\pi}, & \text{n jämn;} \\ 0, & \text{n udda.} \end{cases} \qquad (10)
\end{aligned}$$

Alltså är

$$f(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi(2k+1)}{2}\right)t}{(2k+1)^2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi 2k}{2}\right)t}{2k} \qquad (11)$$

Som ger naturligtvis samma svar som ovan

$$\boxed{f(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\pi(k+1/2)t}{(2k+1)^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi k t}{k}}$$

Metod III

Här studerar vi sambanden

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - n4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\pi/2}$$

där

$$y(t) = f(t) \text{ för } -2 < t < 2,\ 0 \text{ f.ö.}$$

Enligt FS(grön), sid 100, gäller

$$c_n = \frac{1}{4}\,Y\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$Y(\omega)$ beräknar vi m h a derivering av $y(t)$ och får först

$$\begin{aligned}
y' &= \delta(t+2) - \delta(t) - 2\delta(t-2) + \operatorname{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) \\
y'' &= \delta'(t+2) - \delta'(t) - 2\delta'(t-2) + \delta(t) - \delta(t-2)
\end{aligned}$$

och Fourier-transformen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}[y''(t)](\omega) &= (i\omega)^2 Y(\omega) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\delta'(t+2) - \delta'(t) - 2\delta'(t-2) + \delta(t) - \delta(t-2))e^{-i\omega t}\,dt \\
&= i\omega\left(e^{i\omega 2} - 1 - 2\,e^{-i\omega 2}\right) + 1 - e^{-i\omega 2}
\end{aligned}$$

Med insatt $\omega = n\omega_0 = \dfrac{n\pi}{2}$ får vi

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{4}Y\left(\frac{n\pi}{2}\right) &= \frac{1}{4}\frac{2}{in\pi}\left(2i\sin n\pi - 1 - e^{-in\pi}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{in\pi}\right)^2\left(1 - e^{-in\pi}\right) \\ &= \frac{i}{2n\pi}(1+(-1)^n) - \frac{1}{(n\pi)^2}(1-(-1)^n) = \cdots = \\ &= \begin{cases} \dfrac{i}{n\pi}, & \text{n..jämn ;} \\ -\dfrac{2}{(n\pi)^2}, & \text{n..udda.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nu kan vi, på samma sätt som i metod I, bestämma de reella koefficienterna a_n och b_n:

$$a_n = 2\,\mathbf{Re}[c_n] = -\frac{4}{(n\pi)^2},\ n = 2k+1,\ k = 0,1,2,... \tag{12}$$

$$b_n = -2\,\mathbf{Im}[c_n] = -\frac{2}{n\pi},\ n = 2k,\ k = 1,2,3,... \tag{13}$$

och får naturligtvis samma svar

$$\boxed{f(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\pi(k+1/2)t}{(2k+1)^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi kt}{k}}$$

b) Eftersom Fourier-serien alltid går genom medelvärdet i en diskontinuitet blir

$$\boxed{f(0) = \frac{1}{2}}.$$

c) Sätter vi $t = 0$ i serien ovan får vi

$$f(0) = \frac{1}{2} = 1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}, \tag{14}$$

d v s

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

6) Lösning

Det enklaste sättet att beräkna de intressanta frekvenserna är via Fourier-transformen av den samplade signalen:

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) = \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(C_1\delta(f - (\pm f_1 + nf_s)) + C_2\delta(f - (\pm f_2 + nf_s)) + \right. \\ &\quad \left. + C_3\delta((f - (\pm f_3 + nf_s))\right) \end{aligned}$$

Där f_1, f_2, f_3 står för frekvenserna och C_1, C_2, C_3 står för de ointressanta amplituderna och fas av de givna cos-svängningarna. På grund av att vårt lågpassfilter(LP) har bandbredden 200 Hz filtreras alla frekvenser utom $|f| \leq 200$ Hz bort.
Eftersom den givna signalen innehåller frekvenserna $f_1 = 700, f_2 = 750, f_3 = 800$ gäller det att bestämma frekvenser $|f| = |\pm f_{1,2,3} + nf_s| \leqq 200$ för $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, alla f i Hz
Vi får då de aktuella villkoren:

$$\begin{aligned} |\pm 700 + n360| &\leqq 200, \implies n = \mp 2 \implies f_a = \mp 20 \text{ Hz} \\ |\pm 750 + n360| &\leqq 200, \implies n = \mp 2 \implies f_b = \mp 30 \text{ Hz} \\ |\pm 800 + n360| &\leqq 200, \implies n = \mp 2 \implies f_c = \mp 80 \text{ Hz.} \end{aligned}$$

Vi får härmed resultatet

$$\boxed{f_a = 20\,\text{Hz}, f_b = 30\,\text{Hz}, f_c = 80\,\text{Hz.}}$$

för de utgående frekvenserna.
De negativa frekvenserna är en del av symmetrien eftersom signalen är reell och brukar därför oftast inte anges, se figur nedan.