SF1635, Signaler och system I

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2012–06–11

1) Lösning

Ansätt $y' = z(x)$ och hyfsa DE, så får man

$$z' - \frac{2}{x+2} z = \frac{2}{x+2} \tag{1}$$

som har den integrerande faktorn

$$p(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \tag{2}$$

Tillsammans med ekv(1) blir det

$$\begin{aligned} (p\,z)' &= \frac{2}{x+2}\,p = \frac{2}{(x+2)^3} && (3)\\ \Longrightarrow p\,z &= \int \frac{2}{(x+2)^3}\,dx = \frac{-1}{(x+2)^2} + C_1 && (4)\\ \Longrightarrow z = y' &= -1 + C_1(x+2)^2 && (5) \end{aligned}$$

vilket ger den allmänna lösningen

$$y = -x + \frac{1}{3} C_1 (x+2)^3 + C_2 \tag{6}$$

Begynnelsevillkoren $y(0) = -2$, $y'(0) = 7$ ger sedan $C_1 = 2,\ C_2 = -\frac{22}{3}$, som leder till svaret

$$\boxed{y(x) = -x + \frac{2}{3}(x+2)^3 - \frac{22}{3}}$$

2) Lösning

Laplacetransformen av de båda DE och insättning av de givna begynnelsevillkoren ger snabbt

$$\begin{aligned} sX(s) &= -2X(s) + Y(s) && (7)\\ sY(s) &= -6X(s) + 3Y(s) + \frac{1}{s+1} && (8) \end{aligned}$$

som i sin tur leder till

$$\begin{aligned} (s+2)X - Y &= 0 && (9)\\ 6X + (s-3)Y &= \frac{1}{s+1} && (10) \end{aligned}$$

Insättning av ekv(9) i ekv(10) ger nu

$$\begin{aligned} 6X + (s-3)(s+2)X &= \frac{1}{s+1} = (s-1)sX && (11)\\ \Longrightarrow X(s) &= \frac{1}{s(s^2-1)} && (12) \end{aligned}$$

Om vi nu sätter in ekv(12) i ekv (9) får vi

$$Y(s) = \frac{s+2}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s^2-1} + \frac{2}{s(s^2-1)} \tag{13}$$

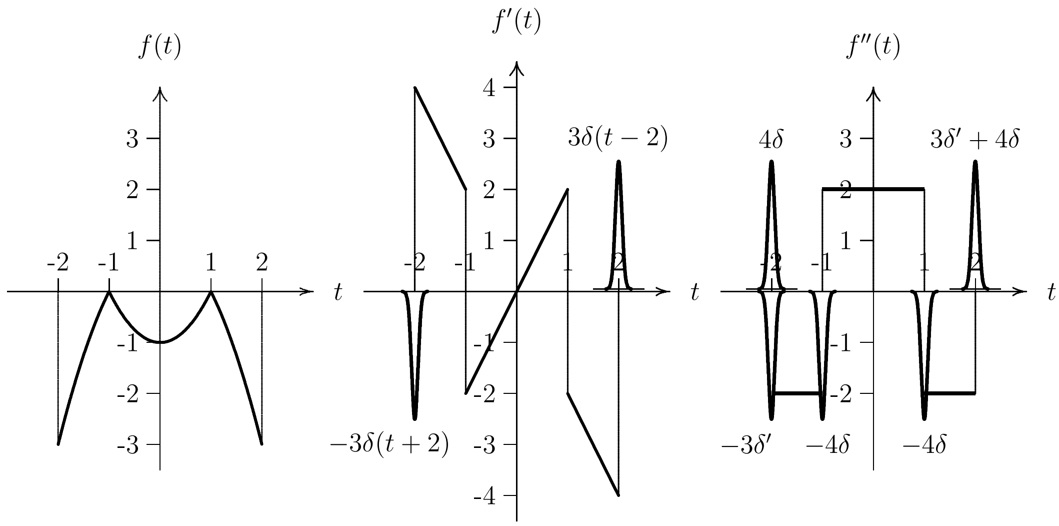
BETA ger nu enkelt och snabbt svaren:

$$\boxed{x(t) = -1 + \cosh(t), \qquad y(t) = -2 + 2\cosh(t) + \sinh(t)}$$

3) Lösning

a) Vi observerar att $f(t) = -\left|t^2-1\right| = \begin{cases} t^2-1, & |t|<1; \\ 1-t^2, & 1<|t|<2. \end{cases}$

Då är det dags att studera aktuella figurer:



Figur 1: f, f', f''

Observera att p g a ytrymmesskäl argumenten till δ och δ' inte är utsatta i figuren för f''. Inspektion leder oss snabbt till:

$$\boxed{f'(t) = -3\,\delta(t+2) + 3\,\delta(t-2) + \begin{cases} 2t, & |t|<1; \\ -2t, & 1<|t|<2. \end{cases}}$$

respektive

$$\boxed{\begin{aligned} f''(t) &= -3\,\delta'(t+2) + 3\,\delta'(t-2) + 4\,\delta(t+2) + 4\,\delta(t-2) \\ &\quad - 4\,\delta(t+1) - 4\,\delta(t-1) - 2\ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right) + 4\ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}}$$

b) BETA och/eller enkla räkningar ger snabbt

$$
\begin{aligned}
(j\omega)^2 F(\omega) &= 3j\omega(-\mathrm{e}^{j2\omega} + \mathrm{e}^{-j2\omega}) + 4(\mathrm{e}^{j2\omega} + \mathrm{e}^{-j2\omega}) && (14)\\
&\quad -4(\mathrm{e}^{j\omega} + \mathrm{e}^{-j\omega}) - \frac{4}{\omega}\sin(2\omega) + \frac{8}{\omega}\sin(\omega) && (15)
\end{aligned}
$$

Hyfsning och förenkling resulterar nu i svaret

$$
\boxed{F(\omega) = -\frac{6}{\omega}\sin(2\omega) - \frac{8}{\omega^2}(\cos(2\omega) - \cos(\omega)) + \frac{4}{\omega^3}\sin(2\omega) - \frac{8}{\omega^3}\sin(\omega)}
$$

c) Eftersom

$$
F(0) = \int_{-2}^{2} f(t)\,dt \Longrightarrow F(0) = 2\int_{0}^{1} t^2 - 1\,dt + 2\int_{1}^{2} 1 - t^2\,dt = \ldots = -4 \quad (16)
$$

Alternativa sätt att beräkna $F(0)$ är en McLaurin-utveckling eller L'Hopital's regel som tar en aning längre tid men ger naturligtvis samma svar $F(0) = -4$.

---

4) Lösning

---

a) Det första man borde observera är att $f_A(t)$ är faltningen

$$
f_A(t) = \int_{t-1}^{t+1} \frac{du}{u^2 + A^2} = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \star \frac{1}{t^2 + A^2} \quad (17)
$$

vilket innebär att, se BETA,

$$
F_A(\omega) = \mathfrak{F}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)\right](\omega) \cdot \mathfrak{F}\left[\frac{1}{t^2 + A^2}\right](\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} \cdot \frac{\pi}{A}\,\mathrm{e}^{-A|\omega|} \quad (18)
$$

Svar a):

$$
\boxed{F_A(\omega) = \frac{2\pi}{A}\,\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{e}^{-A|\omega|}}
$$

b) Här skall vi studera

$$
I = \int_{-\infty}^{\infty} F_{1/2}(\omega)\mathrm{e}^{-|\omega|/2}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{e}^{-2|\omega|/2} d\omega \quad (19)
$$

Vid det laget får man ide´n att I har något samband med en fourierinvers på platsen $t = 0$!!
Det första vi observerar är att $A = 1$ och att, se svar a):

$$
\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{e}^{-|\omega|} = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) \quad (20)
$$

Insättning i ekv(19) ger

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi \, \frac{1}{2\pi} \, F_1(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi \, F_1(\omega) \mathrm{e}^{i\omega 0} d\omega = 4\pi f_1(0) \tag{21}$$

Med $A = 1$ och $t = 0$ insatt i integralen, ekv(17), får vi

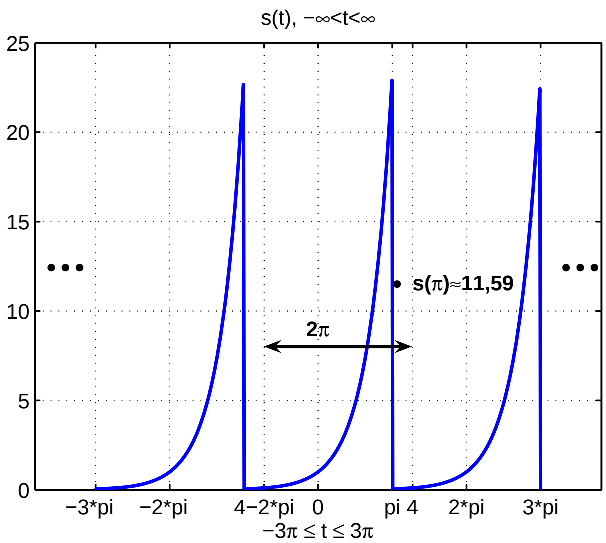
$$I = 4\pi f_1(0) = 4\pi \int_{-1}^{+1} \frac{du}{u^2+1} = 4\pi \, 2 \, \arctan(1) = 4\pi \, 2 \, \frac{\pi}{4} \tag{22}$$

Svar b):

$$\boxed{I = 4\pi f_1(0) = 2\pi^2}$$

---

5) Lösning



Figur 2: s(t) över 3 perioder

a) Det finns flera metoder att lösa problemet, men i detta fall kan det vara minst krävande att använda sig av sambandet mellan Fourierserier och -transformer, se FS(grön) sid 100

$$c_n = \frac{1}{P} Y\left(\frac{2\pi n}{P}\right) \tag{23}$$

där vi har perioden $P = 2\pi$ och
Y står för transformen av $y(t) = s(t) = \mathrm{e}^t$ i intervallet $-\pi < t < \pi$.
Detta leder nu till

$$Y(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-i\omega t} dt = \cdots = \frac{\mathrm{e}^{\pi}\mathrm{e}^{-i\omega\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\mathrm{e}^{i\omega\pi}}{1 - i\omega} \tag{24}$$

Sätter vi nu $P = 2\pi$ i ekv(23) får vi

$$c_n = \frac{1}{2\pi} Y(n) = \frac{e^{\pi} e^{-in\pi} - e^{-\pi} e^{in\pi}}{2\pi(1-in)} \tag{25}$$

och svaret blir

$$\boxed{c_n = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1-in)} = \frac{(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi(1-in)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

b) Med lite eftertanke och en blick på figuren får man svaret

$$\boxed{s(4) = e^{4-2\pi} \simeq 0,1020, \text{ty } 4 - 2\pi \text{ ligger i } (-\pi, \pi)}$$

c) Som vi vet blir Fourierseriens funktionsvärde i en språngpunkt lika med medelvärdet i språnget, m a o blir svaret

$$\boxed{s(\pi) = \frac{1}{2}(s(\pi_+) + s(\pi_-)) = \frac{1}{2}(e^{-\pi} + e^{\pi}) = \cosh(\pi) \simeq 11,5920}$$

---

6) Lösning

Börja med

$$x(nT) = 10 \cos\left(0,22\pi n + \frac{\pi}{13}\right) \tag{26}$$

och jämför det med

$$x(nT) = A \cos(2\pi f_x T n + \varphi) \tag{27}$$

där f_x står för de sökta frekvenserna.
Då får vi direkt $A = 10$ och $2 f_x T = 0,22 \Longrightarrow f_x = (0,22)1000/2 = 110$ Hz och $\varphi = \frac{\pi}{13}$ med resultatet $x(t) = 10 \cos\left(2\pi 110 t + \frac{\pi}{13}\right)$, inte oväntad.
Det enklaste sättet att beräkna de andra,intressanta frekvenserna är via Fourier-transformen av den samplade signalen och därtill en figur i frekvensplanet:

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_s) = \frac{1}{T}(X(f) + X(f \pm f_s) + X(f \pm 2 f_s) \ldots), \tag{28}$$

där punkterna står för, antagligen, ointressanta termer! Vi får se.
Vi börjar med

$$X(f) = \frac{10}{2} \left(\delta(f - 110) e^{j\pi/13} + \delta(f + 110) e^{-j\pi/13}\right) \tag{29}$$

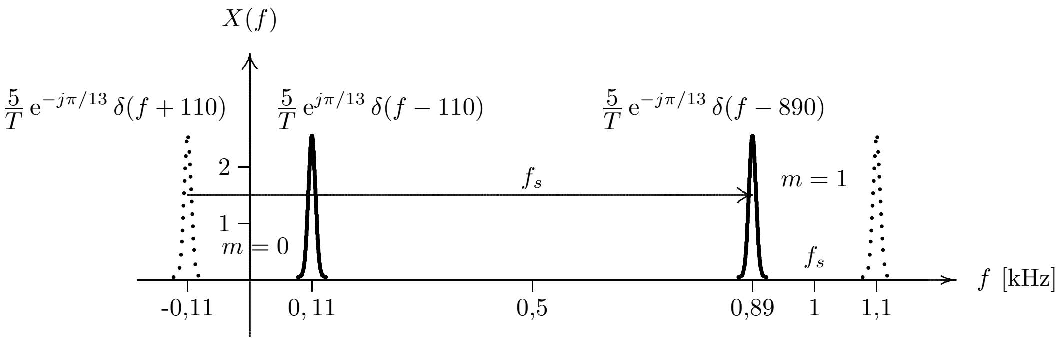
som leder till

$$X_s(f) = \frac{5}{T} \left(\delta(f - 110) e^{j\pi/13} + \delta(f + 110) e^{-j\pi/13}\right. \tag{30}$$

$$\left. + \delta(f - 110 \pm f_s) e^{j\pi/13} + \delta(f + 110 \pm f_s) e^{-j\pi/13} + \ldots\right) \tag{31}$$

m a o fås de aktuella frekvenserna ur sambanden

$$f_m = |f_x \pm m f_s| = |110 \pm m1000| < 1000 \text{ Hz}, \quad m = 0, 1, 2 \ldots \tag{32}$$



Figur 3: samplingsresultatet i f-planet

Olikheten i ekv(32) satisfieras endast av $m = 0$ och $m = 1$ vilket leder till x_0 enligt ovan och $x_1(t) = 10\cos\left(2\pi(-890)t + \frac{\pi}{13}\right) = 10\cos\left(2\pi(890)t - \frac{\pi}{13}\right)$. Observera minustecknet i argumentet, se figur(3). Alltså får vi svaret:

$$\boxed{A = 10, f_0 = 110\text{Hz med } \varphi_0 = \frac{\pi}{13}, \text{ samt } f_1 = 890\text{Hz med } \varphi_1 = -\frac{\pi}{13}}$$