

SF1635, Signaler och system I
Tentamen, måndagen den 15 oktober 2012. Lösningsförslag.

1. Funktionen $y(x) = e^x$ uppfyller differentialekvation

$$xy'' + (x-1)y' - (2x-1)y = 0.$$

Finn allmänna lösningen till ekvationen.

Lösning. Vi använder oss av metoden av reduktion av ordning. Vi söker då den allmänna lösningen till ekvationen i form $y(x) = e^x u(x)$ med ny obekant funktion $u(x)$. Vi har

$$y'(x) = e^x(u + u'); \quad y''(x) = e^x(u + 2u' + u'').$$

Insättningen till ekvationen ger oss

$$xy'' + (x-1)y' - (2x-1)y = e^x(xu'' + (3x-1)u').$$

Den nya ekvationen för funktionen u är

$$u'' = (1/x - 3)u'.$$

Vi betecknar $z(x) = u'$ och löser den sista ekvation som en separabel ekvation. Den blir

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{1}{x} - 3\right)z$$

varav

$$\ln z = \ln x - 3x + C$$

och

$$z(x) = C_1 x e^{-3x}.$$

Vi fick $u'(x) = C_1 x e^{-3x}$. Integrering ger oss

$$u(x) = C_1 \left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) e^{-3x} + C_2$$

och svaret blir

$$y(x) = C_1 \left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) e^{-2x} + C_2 e^x$$

där C_1, C_2 är godtyckliga konstanter.

2. En funktion $y(t)$ är definierad och deriverbar för $t \geq 0$. Den uppfyller sambandet

$$y'(t) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^t \tau^2 y(t - \tau) d\tau$$

och begynnelsevillkor $y(0) = 0$. Bestäm funktionen $y(t)$.

Lösning. Vi använder Laplacetransform för att bestämma lösningen. Vi betecknar med $Y(s)$ Laplacetransformen av lösningen $y(t)$ d v s $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Integralen i högerled av ekvationen i uppgiften är faltning av funktioner $y(t)$ och t^2 . Ekvationen övergår efter Laplacetransform till

$$sY(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2}Y(s)\frac{2}{s^3}.$$

Vi löser ut $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}.$$

Partiellbråkkupplingen ger oss

$$Y(s) = \frac{1/4}{s-1} - \frac{1/4}{s+1} + \frac{1/2 + 0 \cdot s}{s^2 + 1}$$

varav

$$y(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t.$$

3. Funktionen

$$f(t) = \frac{e^{-t^4}}{3 + t^2 - \sin t}$$

har Fouriertransformen $F(\omega) = g(\omega)$.

(a) Vad är Fouriertransformen $G(\omega)$ av funktionen $g(t)$?

(b) Vad är Fouriertransformen $H(\omega)$ av funktionen

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\tau} g(3\tau) g(t - \tau + 4) d\tau?$$

Svaren får inte innehålla integraler. Funktionerna $g(t)$ och $h(t)$ behöver inte bestämmas.

Lösning. (a) Eftersom invers Fouriertransform av g är f , vi har

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega') e^{it\omega'} \frac{d\omega'}{2\pi} = f(t).$$

Fouriertransformen av g blir då

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-it\omega} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega') e^{-i\omega'\omega} \frac{d\omega'}{2\pi} \cdot 2\pi = 2\pi f(-\omega) = \frac{2\pi e^{-\omega^4}}{3 + \omega^2 + \sin \omega}.$$

(b) Funktionen h är faltningen av funktioner $e^{2it}g(3t)$ och $g(t+4)$. Enligt standarda egenskaper hos Fouriertransform, funktionen $g(3t)$ har transformen $\frac{1}{3}G(\omega/3)$ och funktionen $e^{2it}g(3t)$ har transformen

$$\frac{1}{3}G((\omega - 2)/3) = \frac{2\pi e^{-\left(\frac{\omega-2}{3}\right)^4}}{3 \left(3 + \left(\frac{\omega-2}{3}\right)^2 + \sin\left(\frac{\omega-2}{3}\right)\right)}.$$

Funktionen $g(t+4)$ har Fouriertransformen $e^{i4\omega}G(\omega)$. Till slut, funktionen h har Fouriertransformen som är produkt

$$\frac{1}{3}G((\omega - 2)/3) \cdot e^{i4\omega}G(\omega) = \frac{4\pi^2 e^{i4\omega - \omega^4 - \left(\frac{\omega-2}{3}\right)^4}}{3(3 + \omega^2 + \sin \omega)(3 + \left(\frac{\omega-2}{3}\right)^2 + \sin\left(\frac{\omega-2}{3}\right))}.$$

4. Funktionen $x(t)$ är definierad med formeln

$$x(t) = \begin{cases} |\sin(\pi t)| & , \text{ om } -1 \leq t \leq 1; \\ 0 & , \text{ om } |t| > 1. \end{cases}$$

(a) Bestäm formeln för uttrycket $x''(t) + \pi^2 x(t)$.

(b) Använd resultatet i (a) för att bestämma Fouriertransform $X(\omega)$ av funktionen $x(t)$.

(c) Bestäm komplexa Fourierserien för 2-periodiska fortsättningen av $x(t)$.

Lösning. (a) Vi har först

$$x(t) = \begin{cases} -\sin(\pi t) & , \text{ om } -1 \leq t < 0; \\ \sin(\pi t) & , \text{ om } 0 \leq t < 1; \\ 0 & , \text{ om } |t| > 1. \end{cases}$$

Detta ger oss

$$x'(t) = \begin{cases} -\pi \cos(\pi t) & , \text{ om } -1 \leq t < 0; \\ \pi \cos(\pi t) & , \text{ om } 0 \leq t < 1; \\ 0 & , \text{ om } |t| > 1. \end{cases}$$

Funktionen x' innehåller inga δ -funktioner eftersom $x(t)$ är kontinuerlig, den innehåller inga språng. Däremot, derivatan x' har språng i punkter $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$. De motsvarar till δ -funktioner i formeln för andra derivatan. T ex vi har $x'(-1-0) = 0$ och $x'(-1+0) = \pi$ vilket ger oss termen $\pi\delta(t+1)$ i formeln för x'' . Hela formeln är

$$x''(t) = \begin{cases} \pi^2 \sin(\pi t) & , \text{ om } -1 \leq t < 0; \\ -\pi^2 \sin(\pi t) & , \text{ om } 0 \leq t < 1; \\ 0 & , \text{ om } |t| > 1. \end{cases} + \pi\delta(t+1) + 2\pi\delta(t) + \pi\delta(t-1).$$

Svaret i (a) blir

$$x''(t) + \pi^2 x(t) = \pi\delta(t+1) + 2\pi\delta(t) + \pi\delta(t-1).$$

(b) Vi tar Fouriertransform av sista formeln och vi får

$$(i\omega)^2 X(\omega) + \pi^2 X(\omega) = \pi e^{i\omega} + 2\pi + \pi e^{-i\omega} = 2\pi(1 + \cos(t)).$$

Detta ger oss

$$X(\omega) = \frac{2\pi(1 + \cos(t))}{\pi^2 - \omega^2}.$$

(c) 2-periodiska fortsättningen av $x(t)$ motsvarar till sampling av $\frac{1}{2}X$ i punkter $\omega_n = \pi n$. Fourierserien blir då

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\pi n t}, \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{2} X(\pi n) = \frac{1 + \cos(\pi n)}{\pi(1 - n^2)}.$$

5. Ett LTI (d v s linjärt tidsinvariant) system är sådant att det transformerar varje insignalen $x_{\text{in}}(t) = \cos(\omega t)$ med $\omega > 0$ till utsignalen $x_{\text{ut}}(t) = e^{-\omega} \sin(\omega t)$. Vad blir utsignalen $x_{\text{ut}}(t)$ då insignalen är $x_{\text{in}}(t) = \frac{1}{t^2+4}$?

Lösning. Eftersom $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$ och $\sin(\omega t) = -\frac{i}{2}e^{i\omega t} + \frac{i}{2}e^{-i\omega t}$, ser vi att LTI-systemet transformerar exponenten $e^{i\omega t}$ till $-ie^{-\omega}e^{i\omega t}$ och exponenten $e^{-i\omega t}$ till $ie^{-\omega}e^{-i\omega t}$ då $\omega > 0$. Detta ger oss överföringsfunktionen

$$H(\omega) = -i \operatorname{sign}(\omega) e^{-|\omega|}.$$

Om insignalen är $x(t) = \frac{1}{t^2+4}$ då gäller det att $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ för utsignalen $y(t)$.

Vi räknar Fouriertransformen $X(\omega)$ m h av dualiteten. Vita formelsamlingen ger oss att F.T. av funktionen $f(t) = e^{-2|t|}$ är $g(\omega) = \frac{4}{\omega^2+4}$ varav F.T. av funktionen $g(t) = \frac{4}{t^2+4}$ är (se lösning av uppgift 3) $2\pi f(-\omega) = 2\pi e^{-2|\omega|}$. Detta ger oss

$$X(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|}$$

och utsignalen har F.T.

$$Y(\omega) = -\frac{i\pi}{2} \operatorname{sign}(\omega) e^{-3|\omega|}.$$

Invers Fouriertransformen av den räknas m h av dualiteten igen och vi får

$$y(t) = \frac{t}{2(t^2+9)}.$$

6. En signal $x(t)$ är definierad på intervallet $-T \leq t \leq T$. Matte Signalsson försöker att utveckla den i Fourierserie men han tar av misstag felaktiga formeln

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

och han bildar felaktiga Fourierserien

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}.$$

(a) Uttryck erhållen summa $S(t)$ i ursprungliga signalen $x(t)$ då variabeln t ligger i intervallet $-T \leq t \leq T$.

(b) Finns det möjlighet att återskapa $x(t)$ från summan $S(t)$ om man vet att $x(t) = 0$ då $|t| > T/2$?

(c) Vad är rätta formeln för c_n och rätta Fourierserien som konvergerar till signalen $x(t)$ på intervallet $-T \leq t \leq T$?

Lösning. Enklaste är att besvara (c): eftersom längden av intervallet $[-T, T]$ är $2T$, man skall ha $P = 2T$ som perioden i formler för Fourier serien. Detta ger oss

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi}{T}nt}, \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{-i\frac{\pi}{T}nt} dt.$$

Nu besvarar vi (a). Vi tänker nu på funktionen $x(t)$ som definierad på hela reella axeln genom att sätta $x(t) = 0$ då $|t| > T$. Mattes formeln för c_n blir då Fouriertransformen:

$$c_n = \frac{1}{2T} X\left(\frac{2\pi n}{T}\right).$$

Att skapa följderna av koefficienterna c_n innebär samplingen så att vi får vår samplad funktion

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) = \frac{1}{2T} X_{\text{samplad}}(\omega) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right).$$

Att räkna summan $S(t)$ innebär att tillämpa invers Fouriertransform till summan

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

d v s till funktionen $\frac{\pi}{T} X_{\text{samplad}}(\omega)$. Enligt standarda sambandet mellan sampling av Fouriertransformen och periodiska fortsättningen av funktionen får vi att $S(t)$ är periodiska fortsättningen av funktionen $\frac{1}{2}x(t)$ med perioden $P = T$. Detta ger oss formeln (på hela reella axeln)

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT).$$

Eftersom vi vet att $x(t) = 0$ utanför intervallet $[-T, T]$, avgör vi att

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x(t) + x(t+T)), & \text{då } -T < t < 0; \\ \frac{1}{2}(x(t-T) + x(t)), & \text{då } 0 < t < T. \end{cases}$$

Till slut besvarar vi (b). Om man vet att $x(t) = 0$ då $|t| > T/2$ då olika termerna i formeln för T -periodiska fortsättningen av x inte "överlappar" varandra. Detta ger oss att

$$S(t) = \frac{1}{2}x(t)$$

på intervallet $[-T/2, T/2]$ och signalen $x(t)$ återskapas med formeln

$$x(t) = 2 \text{rect}_{[-T/2, T/2]}(t) S(t).$$