Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1635, Signaler och system I

Tentamen, måndagen den 15 oktober 2012 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtna hjälpmedel är formelsamlingen BETA samt utdelade formelsamlingarna.

För godkänd (betyg E) krävs minst 24 poäng. Betygsgränserna för övriga betyg är 28p för D, 32p för C, 36p för B samt 40p för A. Den som får 22p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget E. Kontakta i så fall läraren!

L Y C K A   T I L L !

(7p) **1.** Funktionen $y(x) = e^x$ uppfyller differentialekvation

$$xy'' + (x-1)y' - (2x-1)y = 0.$$

Finn allmänna lösningen till ekvationen.

(8p) **2.** En funktion $y(t)$ är definierad och deriverbar för $t \geq 0$. Den uppfyller sambandet

$$y'(t) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^t \tau^2 y(t-\tau)\, d\tau$$

och begynnelsevillkor $y(0) = 0$. Bestäm funktionen $y(t)$.

3. Funktionen

$$f(t) = \frac{e^{-t^4}}{3 + t^2 - \sin t}$$

har Fouriertransformen $F(\omega) = g(\omega)$.

(3p) (a) Vad är Fouriertransformen $G(\omega)$ av funktionen $g(t)$?

(6p) (b) Vad är Fouriertransformen $H(\omega)$ av funktionen

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\tau} g(3\tau) g(t - \tau + 4)\, d\tau?$$

Svaren får inte innehålla integraler. Funktionerna $g(t)$ och $h(t)$ behöver inte bestämmas.

VÄND!

4. Funktionen $x(t)$ är definierad med formeln

$$x(t) = \begin{cases} |\sin(\pi t)| & , \text{ om } -1 \le t \le 1; \\ 0 & , \text{ om } |t| > 1. \end{cases}$$

(3p) (a) Bestäm formeln för uttrycket $x''(t) + \pi^2 x(t)$.

(3p) (b) Använd resultatet i (a) för att bestämma Fouriertransform $X(\omega)$ av funktionen $x(t)$.

(3p) (c) Bestäm komplexa Fourierserien för 2-periodiska fortsättningen av $x(t)$.

(8p) **5.** Ett LTI (d v s linjärt tidsinvariant) system är sådant att det transformerar varje insignalen $x_{\text{in}}(t) = \cos(\omega t)$ med $\omega > 0$ till utsignalen $x_{\text{ut}}(t) = e^{-\omega}\sin(\omega t)$. Vad blir utsignalen $x_{\text{ut}}(t)$ då insignalen är $x_{\text{in}}(t) = \frac{1}{t^2+4}$?

6. En signal $x(t)$ är definierad på intervallet $-T \le t \le T$. Matte Signalsson försöker att utveckla den i Fourierserie men han tar av misstag felaktiga formeln

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\, dt$$

och han bildar felaktiga Fourierserien

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}.$$

(6p) (a) Uttryck erhållen summa $S(t)$ i ursprungliga signalen $x(t)$ då variabeln t ligger i intervallet $-T \le t \le T$.

(2p) (b) Finns det möjlighet att återskapa $x(t)$ från summan $S(t)$ om man vet att $x(t) = 0$ då $|t| > T/2$?

(1p) (c) Vad är rätta formeln för c_n och rätta Fourierserien som konvergerar till signalen $x(t)$ på intervallet $-T \le t \le T$?