SF1635, Signaler och system I

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2013–01–08

1) Lösning

a) Vi börjar med att studera y':s tecken och får

$$y' = \frac{y(y-3)}{3} = \begin{cases} > 0, & 3 < y < \infty; \\ < 0, & 0 < y < 3; \\ > 0, & -\infty < y < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Slutsats: $-\infty < y_0 < 3$, $y = 0$ är en attraktionspunkt.

b) Nu skall vi studera

$$\int \frac{dy}{y(y-3)} = \frac{1}{3}\int -\frac{1}{y} + \frac{1}{y-3}\,dy = \int \frac{dx}{3} \tag{2}$$

Integration leder till

$$\ln \frac{y-3}{y} = x + C_1 \Longrightarrow \frac{y-3}{y} = \mathrm{e}^x C_2 \tag{3}$$

där vi redan nu kan bestämma C_2 m h a $y(0) = 4$, och vi får $C_2 = \frac{1}{4}$
då ger ekv(3), efter insättning och hyfsning, svaret

$$\boxed{y(x) = \frac{12}{4-\mathrm{e}^x},\ \text{med } -\infty < x < \ln 4}$$

2) Lösning

Vi börjar med att

I) bestämma λ via

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 9 \\ -1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 = 0 \tag{4}$$

Vi har alltså en dubbelrot, $\lambda = -2$, som kräver en speciell behandling.
Den ena lösningsvektorn blir $\mathbf{X}_1 = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}_1$
emedan den andre får formen $\mathbf{X}_2 = \mathrm{e}^{\lambda t}(t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$, se bl a i Beta.

II) $\mathbf{v}_1$: Studera

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \tag{5}$$

som leder till $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

III) $\mathbf{v}_2$: Nu studerar vi

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Ekv(6), med valet $v_{22}=0$, ger oss $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Vi får nu våra 2 lösningar

$$\mathbf{X}_1=\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{X}_2=\mathrm{e}^{-2t}\left(t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{7}$$

och detta leder till den allmänna lösningen

$$\mathbf{X}=c_1\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}+c_2\mathrm{e}^{-2t}\left(t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \tag{8}$$

IV) Återstår att bestämma c_1, c_2 för att få lösningskurvan genom $1, -1$ vid $t=0$. Med insatta värden leder ekv(8) till

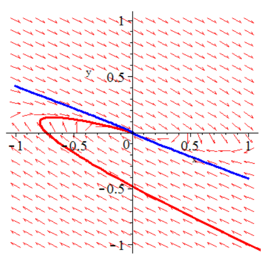
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad c_1=1,\ c_2=-2 \tag{9}$$

Det slutliga svaret blir nu

$$\boxed{\mathbf{X}(t)=\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1-6t \\ -1+2t \end{pmatrix}}$$

Den aktuella figuren finns här nedan

fig1301_2



3) Lösning

Observera att vi kan skriva $h(t)$ på ett "enklare" sätt, nämligen

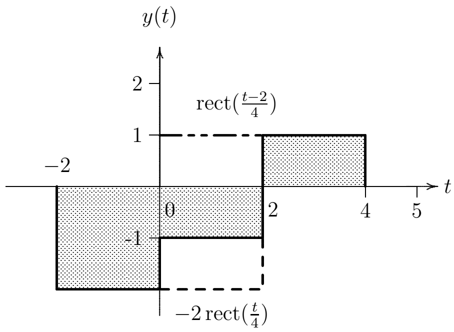
$$h(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{4}\right) \tag{10}$$

och då vet vi att $\delta(t+a) * h(t) = h(t+a)$ som ger i vårt fall

$$
\begin{aligned}
y(t) &= (\delta(t-1) - 2\,\delta(t+1)) * \mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{4}\right) = && (11)\\
&= \mathrm{rect}\left(\frac{t-1-1}{4}\right) - 2\ \mathrm{rect}\left(\frac{t-1+1}{4}\right) && (12)
\end{aligned}
$$

Alltså blir svaret: $\boxed{y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right) - 2\ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right)}$

Återstår figuren:



---

4) Lösning

Vi börjar med att $\mathscr{L}$-transformera den givna differentialekvationen och får

$$(s^2+4)Y(s) - y'(0) = \frac{1}{s^2+1}(1-\mathrm{e}^{-s\pi}) \tag{13}$$

Insättning av $y'(0) = 1$ ger lösningen i s-planet

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s^2+4}\left[\frac{1}{s^2+1}\left(1-\mathrm{e}^{-s\pi}\right)+1\right] && (14)\\
&= \frac{1}{s^2+4}\frac{1}{s^2+1} - \frac{\mathrm{e}^{-s\pi}}{(s^2+4)(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+4} && (15)
\end{aligned}
$$

Inverstransformering m h a , t ex BETA, leder till

$$\frac{1}{s^2+4}\frac{1}{s^2+1} \overset{\mathscr{L}^{-1}}{\longrightarrow} \frac{1}{6}(-\sin 2t + 2\sin t) \quad \text{och} \quad \frac{1}{s^2+4} \overset{\mathscr{L}^{-1}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\sin 2t \tag{16}$$

samt insättning i ekv(15) ger först sambandet

$$y(t) = \left[\frac{1}{6}(-\sin 2t + 2\sin t) + \frac{1}{2}\sin 2t\right]\mathcal{U}(t) - \frac{1}{6}\left[-\sin 2(t-\pi) + 2\sin(t-\pi)\right]\mathcal{U}(t-\pi) \tag{17}$$

som efter förenkling resulterar i svaret

$$\boxed{y(t) = \left[\tfrac{1}{3}(\sin 2t + \sin t)\right]\mathcal{U}(t) + \tfrac{1}{6}\left[\sin 2t + 2\sin(t)\right]\mathcal{U}(t-\pi)}$$

eller på en annan form

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} (\sin 2t + \sin t)/3, & 0 < t < \pi; \\ (\sin 2t)/2 + (2\sin t)/3, & t > \pi. \end{cases}}$$

---

5) Lösning

---

a) För att hamna i intervallet [0,1] måste vi lägga till/dra ifrån perioden 1, vilket leder till

$$S\left(-\frac{3}{4}\right) = S\left(-\frac{3}{4}+1\right) = S\left(\frac{1}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{18}$$

$$S\left(\frac{3}{2}\right) = S\left(\frac{3}{2}-1\right) = S\left(\frac{1}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \tag{19}$$

b) För att beräkna koefficienterna A_n börjar vi med att integrera det givna sambandet

$$\sin(\pi x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) \tag{20}$$

över en period som leder till att summan försvinner och kvar blir

$$\int_0^1 \sin(\pi x)dx = \frac{2}{\pi} = A_0 \tag{21}$$

Därefter multiplicerar vi ekv(20) med $\cos m\pi x$, integrerar termvis över perioden 1, samt utnyttjar ortogonaliteten, som resulterar i sambanden

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(\pi x)\cos(m\pi x)dx &= A_0 \int_0^1 \cos(m\pi x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 A_n \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)dx \\ \int_0^1 \sin(\pi x)\cos(n\pi)xdx &= 0 + A_n \int_0^1 \cos^2(n\pi x)dx = A_n \frac{1}{2}, \quad \text{för } m = n \geqq 1 \end{aligned} \tag{22}$$

För att beräkna integralen i VL av ekv(22) gör vi variabelsubstitutionen $\pi x = y$ och får, se BETA,

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(n\pi)xdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & \text{n..udda;} \\ \dfrac{2}{\pi(1-n^2)}, & \text{n=2,4,6...} \end{cases} \tag{23}$$

Sammanfattningsvis får vi nu svaret

$$\boxed{A_n = \frac{4}{\pi(1-n^2)}, \quad n = 2,4,6\ldots \quad A_0 = \frac{2}{\pi}}$$

c) Summans värde bestämmer vi m h a Parsevals relation som lyder i vårt fall:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 = \int_0^1 \sin^2(\pi x)\, dx = \frac{1}{2} \tag{24}$$

som är svaret till 5c).

---

6) Lösning

Det enklaste sättet att beräkna de intressanta frekvenserna är via Fourier-transformen av den samplade signalen:

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{3}{2}\delta(f \pm 360 - mf_s) + \frac{1}{2}\delta(f \pm 240 - mf_s) \tag{25}$$

m a o fås de aktuella frekvenserna ur sambanden

$$f = f_{1,2} + mf_s$$

med hänsyn tagen till rekonstruktionsfiltrets bandbredd.
I vårt fall blir det (i Hz):
$|360 - m600| < 300$ endast för $m = 1$, $|240 - m600| < 300$ endast för $m = 0$ och motsvarande för negativa frekvenser.
Slutsats: 240Hz tonen ligger kvar opåverkad, 360Hz tonen viks in till 240Hz, som ger oss svaret:

$$\boxed{y(t) = 4\cos(480\pi t)}$$
