KTH Matematik

SF1635, Signaler och system I

Tentamen tisdagen 2013-01-08, kl $14^{00} - 19^{00}$

Hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook.
Räknedosa utan program.
"Formelsamling i Signalbehandling" (rosa),
"Formelsamling för kursen SF1635" (ljusgrön).

Obs 1: Uppgifterna är ordnade varken kurskronologiskt eller efter svårighetsgrad.

Obs 2: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Förenkla svaren så långt som möjligt!
Ange vad införda beteckningar, som inte är standard, står för.
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Obs 3: Tentamen består av 6 uppgifter, vilka sammanlagd ger 50 poäng.
Efter tentamens slut publiceras ett lösningsförslag pånätet.

Obs 4: Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E	FX	
krävs	40	36	32	28	24	20	poäng (inkl bonus)

FX innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E.
Tid och plats för den meddelas senare vid behov.

Ansvarig: Franz J Čech, Serguei Shimorin

---

1) Betrakta differentialekvationen

$$y' = \frac{y^2 - 3y}{3}$$

a) För vilka startvärden $y_0 = y(0)$ är gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} y(t)$ ändligt ? [2p]

b) Bestäm lösningen då $y(0) = 4$ samt ange dess existensintervall [4p]

---

v g v

2) a) Lös nedanstående begynnelsevärdesproblem [6p]

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{X}(t) \text{ med } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Skissa systemets fasportträtt. [3p]

c) Ange speciellt banan genom $(1, -1)$ med riktning för växande t [1p]

---

3) Ett LTI-system har pulssvaret

$$h(t) = \mathcal{U}(t+1) - \mathcal{U}(t-3)$$

där $\mathcal{U}(t)$ är Heavisidefunktionen.
Bestäm utsignalen $y(t)$ om insignalen definieras av [6p]

$$x(t) = \delta(t-1) - 2\,\delta(t+1)$$

Rita en tydlig figur av $y(t)$. [2p]
Obs: Problemet kan lösas utan omfattande räkningar.

---

4) Lös differentialekvationen

$$y''(t) + 4y(t) = g(t), \quad \text{då} \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 1$$

och [8p]

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi; \\ 0, & \pi < t. \end{cases}$$

---

5) En Fourier-serie

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\pi x)$$

konvergerar mot summan $S(x) = \sin(\pi x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$

(a) Bestäm $S\left(-\frac{3}{4}\right)$ och $S\left(\frac{3}{2}\right)$ [1p]

(b) Bestäm koefficienterna A_n [4p]

(c) Bestäm summan $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2$ [3p]

---

6) Signalen

$$x(t) = 3\cos(720\pi t) + \cos(480\pi t)$$

samplas med frekvensen $f_s = \frac{1}{T} = 600$ Hz. Bestäm signalen $y(t)$ som erhålles efter rekonstruktion med ett idealt lågpass filter $H_{LP}(f) = T\,\text{rect}\left(\frac{f}{600}\right)$. [10p]

Lycka till !

Franz J