SF1635, Signaler och system I

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2014–01–14

1) Lösning

Vi löser problemet m h a integrerande faktorn $p(x) = \mathrm{e}^{-x}$ och får sambandet

$$(\mathrm{e}^{-x}y)' = \mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-x}\sin x \tag{1}$$

$$\mathrm{e}^{-x}y = -\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{\sin x + \cos x}{2}\right) + c \tag{2}$$

$$y(x) = -1 - \left(\frac{3}{2}\right)(\sin x + \cos x) + c\,\mathrm{e}^{x} \tag{3}$$

Om $y(x)$ skall vara begränsad så måste $c = 0$, vilket leder till

$$y(0) = -1 - \frac{3}{2} = y_0 \tag{4}$$

som ger svaret

$$\boxed{y_0 = -\tfrac{5}{2} \quad \text{och} \quad y(x) = -1 - \left(\tfrac{3}{2}\right)(\sin x + \cos x)}$$

2) Lösning

Vi börjar som vanligt med att skriva ODE'n på standardform

$$y'' + \frac{6}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 2\,\frac{\ln x}{x^2}, \quad x > 0 \tag{5}$$

Därefter ansätter vi, där vi väljer den 'enklare' av de 2 givna lösningarna,

$$y(x) = z(x)y_1 = z(x)x^{-1} \Longrightarrow y' = z'x^{-1} - zx^{-2} \Longrightarrow y'' = z''x^{-1} - 2z'x^{-2} + 2zx^{-3}$$

Insättning i ekv(5) leder till

$$z''x^{-1} + 4z'x^{-2} = 2x^{-2}\ln x \Longrightarrow z'' + \frac{4}{x}z' = 2\frac{\ln x}{x} \tag{6}$$

som vi löser m h a den integrerande faktorn

$$p(x) = \mathrm{e}^{\int (4/x)dx} = x^4 \Longrightarrow (z'x^4)' = 2\frac{\ln x}{x}x^4 \tag{7}$$

och erhåller först,
se BETA, avsnitt 7.4, $n = 3, a = 1, \int x^3 \ln x dx = x^4(\ln x/4 - 1/16) + C$

$$z'x^4 = \int 2x^3 \ln x dx = 2x^4\left(\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16}\right) + C_1 \tag{8}$$

och efter hyfsning och integration

$$z = \cdots = \frac{x\ln x}{2} - \frac{5x}{8} - \frac{C_1}{3x^3} + C_2 \tag{9}$$

Detta resulterar i den allmänna lösningen

$$\boxed{y_{\text{allm}}(x) = \frac{\ln x}{2} - \frac{5}{8} + \frac{C_3}{x^4} + \frac{C_2}{x} \quad \text{med} \quad C_3 = -\frac{C_1}{3}}$$

Insättning av $y(1) = -\frac{5}{8}$, $y'(1) = -1$ leder till slut till svaret

$$\boxed{y(x) = \frac{\ln x}{2} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{2x}}$$

---

3) Lösning

---

i) Egenvärden fås m h a sambanden:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

som ger egenvärdena $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, där $\lambda_1 = -1 - 2i$ leder i sin tur till

ii) egenvektorn $\mathbf{v}_1$:

$$\begin{pmatrix} -1+1+2i & -4 \\ 1 & -1+1+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow v_{11} + i2v_{12} = 0, \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix};$$

Detta resulterar i

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-2i)t} = e^{-t} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} (\cos 2t - i \sin 2t) \tag{10}$$

$$= e^{-t} \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + i e^{-t} \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} \tag{11}$$

iii) Från teorien vet vi att den allmänna lösningen fås via

$$\mathbf{X}_{\text{allm}}(t) = c_1 \text{Re}\{\mathbf{X}_1(t)\} + c_2 \text{Im}\{\mathbf{X}_1(t)\} \tag{12}$$

som i vårt fall, se ekv(11), ger svaret i matrisform

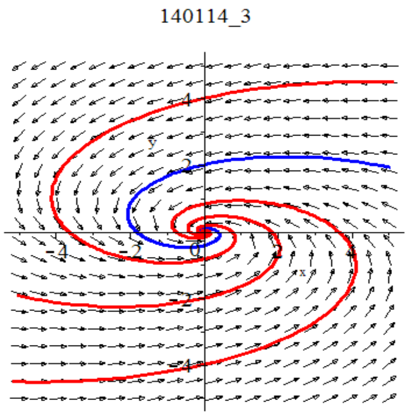
$$\boxed{\mathbf{X}_{\text{allm}}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}}$$

iv) Svaret ovan ger

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c_1 = 2,\ c_2 = 0 \tag{13}$$

som leder till kurvan som är utritad blått i fasporträttet,

$$\mathbf{X}(t) = 2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} \tag{14}$$



Figur 1: $x' = -x - 4y, y' = x - y$

v) Eftersom våra 2 egenvärden har negativ realdel blir slutsatsen att origo är en stabil spiralpunkt.

---

4) Lösning

Vi löser problemet först m h a Fourier-transformen, den andra metoden är att använda sig av faltningen i tidsplanet, som vi tar därefter.
Metod I:
Vi vet att

$$y(t) = (x * h)(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} y(t) \tag{15}$$

alltså börjar vi med, se BETA,

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}, \quad H(\omega) = \frac{2}{1+j\omega} - \frac{2}{2-j\omega} \tag{16}$$

$$Y(\omega) = \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right)\left(\frac{2}{1+j\omega} - \frac{2}{2-j\omega}\right) \tag{17}$$

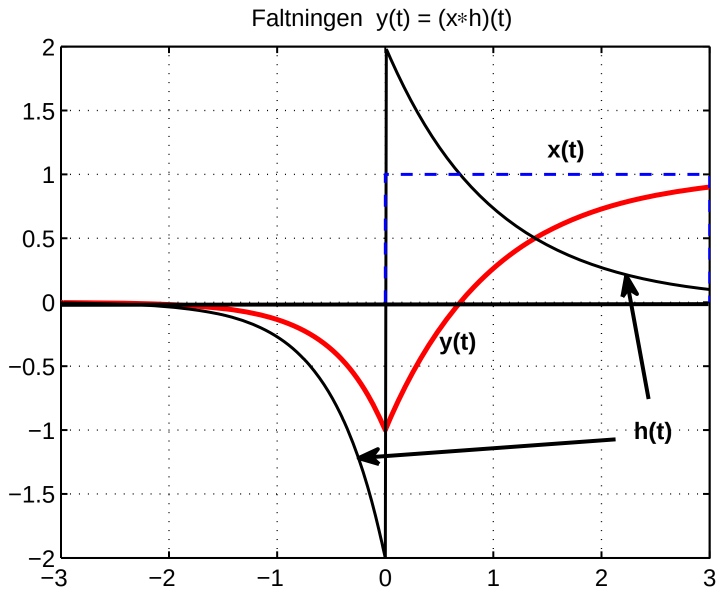
$$= \pi\delta(\omega)\left(\frac{2}{1+j\omega} - \frac{2}{2-j\omega}\right) + \left(\frac{1}{j\omega}\right)\left(\frac{2}{1+j\omega} - \frac{2}{2-j\omega}\right) \tag{18}$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{2}{2-j\omega} - \frac{2}{1+j\omega} \tag{19}$$

där vi använde partialbråksuppdelning m a p $j\omega$ på andra delen av sambandet (18)
Enkel tabellslagning i BETA ger svaret

$$\boxed{y(t) = \mathcal{U}(t) - \mathrm{e}^{2t}\mathcal{U}(-t) - 2e^{-t}\mathcal{U}(t)}$$

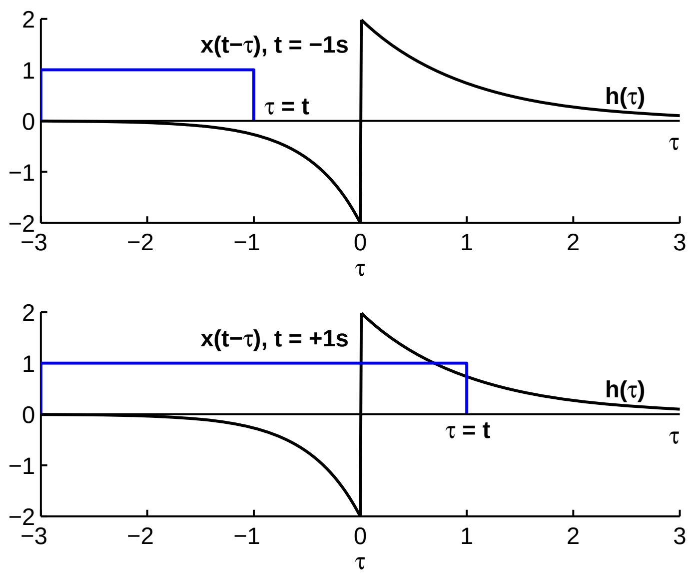
Figur 2 visar funktionerna $x(t), h(t)$ och $y(t) = (x * h)(t)$



Figur 2:

Metod II:
Här gäller det att studera faltningsintegralen

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{20}$$



Figur 3:

a) Steg 1: $y_1(t)$, $t < 0$: se figur 3, övre

$$y_1 = \int_{-\infty}^{t<0} -2e^{2\tau} d\tau = \cdots = -e^{2t} \tag{21}$$

b) Steg 2: $y_2(t)$, $t > 0$: se figur 3, nedre

$$y_2 = \int_{-\infty}^{t>0} h(\tau) d\tau \;=\; \int_{-\infty}^{0} -2e^{2\tau} d\tau + \int_{0}^{t} 2e^{-\tau} d\tau = \tag{22}$$

$$= \ldots \;=\; -1 + (2 - 2e^{-t}) = 1 - 2e^{-t} \tag{23}$$

som ger naturligtvis samma svar som i Metod I, röda linjen i figur 2.

5) Lösning

$\mathscr{L}$-transformering av den givna ODE leder till

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = \mathrm{e}^{-5s} + \frac{\mathrm{e}^{-10s}}{s} + \mathrm{e}^{-2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{s+1} \tag{24}$$

Insättning av begynnelsevärden ger

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-5s} + \frac{\mathrm{e}^{-10s}}{s} + \mathrm{e}^{-2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{s+1} \tag{25}$$

Alltså fås lösningen i s-planet

$$Y(s) = \frac{(1/2) + \mathrm{e}^{-5s}}{(s+2)(s+1)} + \frac{\mathrm{e}^{-10s}}{s(s+2)(s+1)} + \mathrm{e}^{-2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{(s+1)^2 (s+2)} \tag{26}$$

och nu ger BETA, avsnitt 13.5,

$$\frac{1}{(s+2)(s+1)} \stackrel{\mathscr{L}^{-1}}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t} \tag{27}$$

$$\frac{1}{s(s+2)(s+1)} \stackrel{\mathscr{L}^{-1}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-t} + 1\right) \tag{28}$$

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \stackrel{\mathscr{L}^{-1}}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t} \tag{29}$$

$$\mathrm{e}^{-Ts} F(s) \stackrel{\mathscr{L}^{-1}}{\longrightarrow} \begin{cases} f(t-T), & t > T \geqq 0; \\ 0, & t < T. \end{cases} \tag{30}$$

Insättning av dessa samband i ekv(26) resulterar i svaret

$$\boxed{\begin{gathered} y = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)\mathcal{U}(t) + \left(\mathrm{e}^{-(t-5)} - \mathrm{e}^{-2(t-5)}\right)\mathcal{U}(t-5) + \\ \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2(t-10)} - 2\mathrm{e}^{-(t-10)} + 1\right)\mathcal{U}(t-10) + \\ \mathrm{e}^{-2\pi}\left(\mathrm{e}^{-2(t-2\pi)} - \mathrm{e}^{-(t-2\pi)} + (t-2\pi)\mathrm{e}^{-(t-2\pi)}\right)\mathcal{U}(t-2\pi) \end{gathered}}$$

6) Lösning

Det enklaste sättet att beräkna de intressanta frekvenserna är via Fourier-transformen av den samplade signalen:

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s) \tag{31}$$

alltså börjar vi med

a)

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{3}{2}(\delta(f-1000)+\delta(f+1000)) && (32) \\ &+ \frac{5}{2j}\left(\delta(f-3000)\mathrm{e}^{-j\pi/3} - \delta(f+3000)\mathrm{e}^{j\pi/3}\right) && (33) \\ &+ \frac{10}{2}(\delta(f-6000)+\delta(f+6000)) && (34) \end{aligned}$$

Sampling av $x(t)$ med $f_s = 5000$Hz ger en signal vars frekvensinnehåll är den f_s-periodiska fortsättningen till X:s frekvensinnehåll, se ekv(31).
Frekvenserna blir nu ±1000+m5000, ±3000+m5000 och ±6000+m5000, m heltal. Vid applicering av LP-filtret kapas alla frekvenser utanför intervallet $|f| < 2500$Hz.

Återstår frekvenserna $\boxed{f = \pm 1000\text{Hz och } \pm 2000\text{Hz}}$

b) Resultaten i a) leder till

$$\begin{aligned} Y_{\text{rek}}(f) &= \frac{3}{2}(\delta(f-1000)+\delta(f+1000)) && (35) \\ &+ \frac{5}{2j}\left(\delta(f+2000)\mathrm{e}^{-j\pi/3} - \delta(f-2000)\mathrm{e}^{j\pi/3}\right) && (36) \\ &+ \frac{10}{2}(\delta(f-1000)+\delta(f+1000)) && (37) \end{aligned}$$

Först observerar vi att sambandet (36) står för Fourier-transformen av $-5\sin(4000\pi t + \pi/3)$!! och inverstransformering av $Y_{\text{rek}}(f)$ ger nu svaret

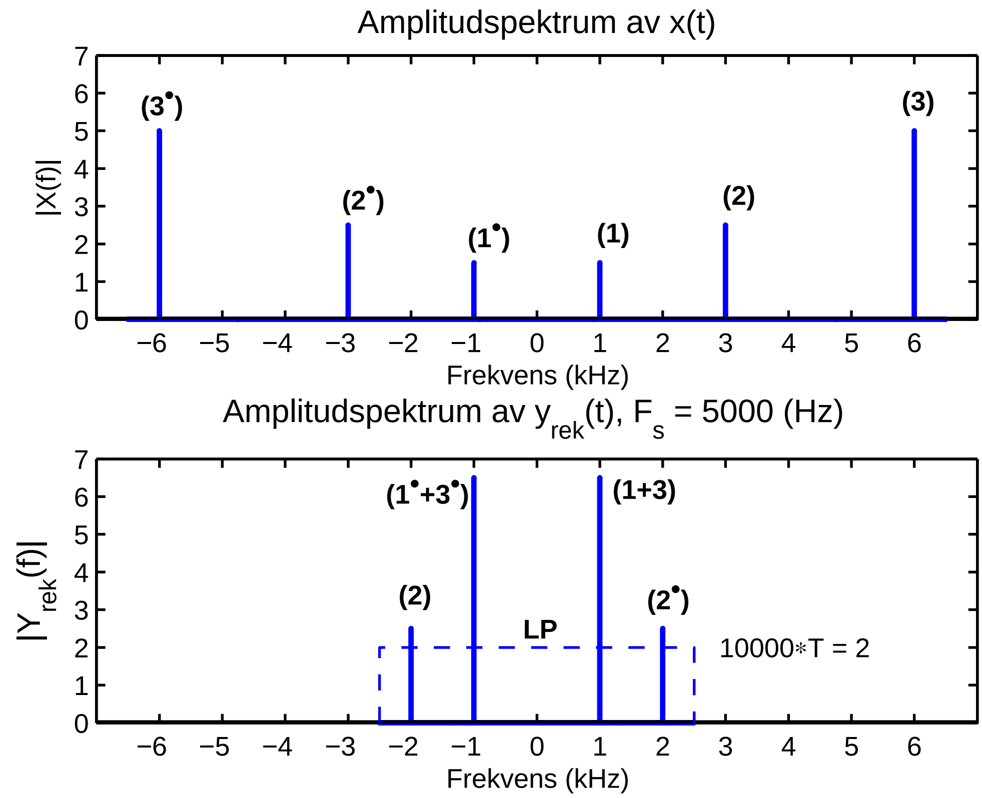
$$\boxed{y_{\text{rek}}(t) = 13\cos(2000\pi t) - 5\sin\left(4000\pi t + \tfrac{\pi}{3}\right)}$$

Nedanstående figur 4 visar amplitudspektra för $x(t)$ och $y_{\text{rek}}(t)$

Kommentar: Man kan också få fram sinus bidraget i svaret genom att studera

$$\begin{aligned} 5\sin\left(2\pi(3000-5000)t - \frac{\pi}{3}\right) &= 5\sin\left(2\pi(-2000)t - \frac{\pi}{3}\right) && (38) \\ &= -5\sin\left(4000\pi t + \frac{\pi}{3}\right) && (39) \end{aligned}$$

v s v.


Amplitudspektrum av x(t)
|X(f)|
(3•)
(2•)
(1•)
(1)
(2)
(3)
Frekvens (kHz)
Amplitudspektrum av y_rek(t), F_s = 5000 (Hz)
|Y_rek(f)|
(1•+3•)
(1+3)
(2)
(2•)
LP
10000∗T = 2
Frekvens (kHz)

Figur 4: