KTH Matematik

SF1635, Signaler och system I

Tentamen tisdagen 2014-01-14, kl $8^{00} - 13^{00}$

Hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook.
"Formelsamling i Signalbehandling" (rosa),
"Formelsamling för Kursen SF1635" (ljusgrön).

Obs 1: Uppgifterna är ordnade varken kurskronologiskt eller efter svårighetsgrad.

Obs 2: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Förenkla svaren så långt som möjligt!
Ange vad införda beteckningar, som inte är standard, står för.
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Obs 3: Tentamen består av 6 uppgifter, vilka sammanlagd ger 50 poäng.
Efter tentamens slut publiceras ett lösningsförslag på nätet.

Obs 4: Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E	FX	
krävs	40	36	32	28	24	20	poäng (inkl bonus)

Ansvarig: Franz J Čech

---

1) Bestäm värdet av y_0 för vilket lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y' - y = 1 + 3\sin x, \quad y(0) = y_0$$

är begränsad då $x \to \infty$ och ange lösningen. [6p]

---

v g v

2) Bestäm lösningen till ODE

$$x^2y'' + 6xy' + 4y = 2\ln x, \quad x > 0$$

uppfyllande $y(1) = -\frac{5}{8}$, $y'(1) = -1$ och där vi vet att $y_1(x) = x^{-1}$ och $y_2(x) = x^{-4}$ är två lösningar till den homogena ekvationen. [7p]

---

3) Bestäm alla reellvärda funktioner $x(t)$ och $y(t)$ som satisfierar systemet

$$\begin{aligned} x' &= -x - 4y \\ y' &= x - y \end{aligned}$$

Skissa också ett kvalitativt riktigt **fasporträtt** för systemet.
Porträttet skall innehålla minst 2 banor där en skall gå genom punkten $x(0) = 0, y(0) = 2$
Ange med pilar på minst en bana åt vilket håll den genomlöps då t växer.
Klassificera lösningen med avseende på typ och stabilitet. [9p]

---

4) Givet 2 funktioner

$$x(t) = \mathcal{U}(t) \quad \text{och} \quad h(t) = 2e^{-t}\mathcal{U}(t) - 2e^{2t}\mathcal{U}(-t)$$

bestäm faltningen $y(t) = (x * h)(t)$ samt rita en tydlig figur av svaret. [9p]

---

5) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet [9p]

$$y'' + 3y' + 2y = \mathcal{U}(t-10) + \delta(t-5) + \mathrm{e}^{-t}\mathcal{U}(t-2\pi), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{2}.$$

---

6) Den stationära signalen

$$x(t) = 3\cos(2000\pi t) + 5\sin\left(6000\pi t - \frac{\pi}{3}\right) + 10\cos(12000\pi t)$$

samplas med frekvensen $f_s = 5000$ Hz och rekonstrueras sedan m h a ett idealt lågpassfilter med gränsfrekvensen B=2500 Hz och höjden $T = 1/f_s = 1/5000$.
Den resulterande signalen kallar vi $y_{\text{rek}}(t)$.

a) Vilket är frekvensinnehållet i signalen $y_{\text{rek}}(t)$?
Med frekvensinnehållet till en signal $y_{\text{rek}}(t)$ menas mängden av frekvenser f för vilka signalens transform $Y_{\text{rek}}(f) \neq 0$. [4p]

b) Bestäm den reella signalen $y_{\text{rek}}(t)$. [6p]

Lycka till !

Franz J