Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1635, Signaler och system I
Tentamen, måndagen den 3 juni 2013. Lösningsförslag.

1. (a) Bestäm den allmänna lösningen till det givna ODE-systemet

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y; \\ y' = x - 2y. \end{cases}$$

Svaret skall vara i reell form!

(b) Bestäm även lösningen som går genom punkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i tidsmoment $t = 0$.

Lösning. (a) Det är ett ljnjärt system med konstanta koefficienter. Vi söker först egenvärdena av matrisen. Det karakteristiska polynomet är

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Det har komplexa rötter $\lambda = \pm i$. Eftersom matrisen är reell räcker det att hitta en komplex lösning till systemet och ta därefter dess reell och imaginär del som två linjärt oberoende reella lösningar.

Vi väljer egenvärdet $\lambda = i$ och vi får motsvarande egenvektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$. Detta ger oss den komplexa lösningen till systemet

$$X_{\text{komplex}}(t) = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t + i(\cos t + 2\sin t) \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix}.$$

Dess reell och imaginär del ger oss två reella lösningar

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen är

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t),$$

där C_1, C_2 är godtyckliga reella konstanter.

(b) Vi stoppar $t = 0$ till sista formeln. Detta ger oss

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi hittar $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ vilket ger oss lösningen

$$X(t) = X_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

2. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = h(t);\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1.$$

Här är

$$h(t) = \begin{cases} 2, & \text{om } \pi \le t < 2\pi; \\ 0, & \text{om } 0 \le t < \pi \text{ eller } t \ge 2\pi. \end{cases}$$

Lösning. Vi använder Laplacetransform för att bestämma lösningen. Vi betecknar med $Y(s)$ Laplacetransformen av lösningen $y(t)$ d v s $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Vänsterledet av ekvationen har då Laplacetransformen

$$s^2Y(s) - 1 + 2sY(s) + 2Y(s).$$

Vi skriver om högerledet som

$$h(t) = 2\mathcal{U}(t-\pi) - 2\mathcal{U}(t-2\pi),$$

där $\mathcal{U}$ är Heavisides funktion. Laplacetransform av högerledet blir då

$$\frac{2e^{-\pi s}}{s} - \frac{2e^{-2\pi s}}{s}.$$

Hela ekvationen efter Laplacetransform blir

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) - 1 = \frac{2e^{-\pi s}}{s} - \frac{2e^{-2\pi s}}{s}$$

och vi hittar

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} + \frac{2e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 2)} - \frac{2e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 2s + 2)}.$$

Nu söker vi invers Laplacetransform. Uttrycket för $Y(s)$ består av 3 termer. Den första termen är

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}.$$

Invers Laplacetransform av den är $e^{-t}\sin t$.

För att hantera den andra termen behöver vi först partiellbråkuppdelning:

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B(s+1) + C}{(s+1)^2 + 1}.$$

Vi hittar $A = 1/2$, $B = C = -1/2$. Detta ger oss den andra termen i form

$$\frac{e^{-\pi s}}{s} - e^{-\pi s}\frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - e^{-\pi s}\frac{1}{(s+1)^2 + 1}.$$

Invers Laplacetransformen blir

$$\mathcal{U}(t-\pi) + \cos t e^{\pi - t}\mathcal{U}(t-\pi) + \sin t e^{\pi - t}\mathcal{U}(t-\pi).$$

Invers Laplacetransformen av den tredje termen hittas analogt som för den andra termen. Den blir

$$-\mathcal{U}(t-2\pi) + \cos t e^{2\pi - t}\mathcal{U}(t-2\pi) + \sin t e^{2\pi - t}\mathcal{U}(t-2\pi).$$

Hela lösningen är

$$y(t) = e^{-t}\sin t + (e^{t-\pi} + \cos t + \sin t)e^{\pi - t}\mathcal{U}(t-\pi) + (-e^{t-2\pi} + \cos t + \sin t)e^{2\pi - t}\mathcal{U}(t-2\pi).$$

3. En Fourier serie

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2nt)$$

konvergerar mot summan $S(t) = 1 - \cos(t)$ på intervallet $0 \leq t \leq \pi/2$.

(a) Bestäm $S(5\pi/4)$ samt $S(2\pi/3)$.

(b) Beräkna koefficienterna b_n.

(c) Bestäm summan $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$.

Lösning.

(a)Det är sinus-Fourierserie vilket ger att summan är en udda funktion. Vi får då

$$S(t) = -(1 - \cos t), \quad \text{då } -\frac{\pi}{2} < t < 0.$$

Dessutom, summan har perioden $T = \pi$ på hela reella axeln. Vi får då

$$S(\frac{5\pi}{4}) = S(\frac{\pi}{4}) = 1 - \cos(\pi/4) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

och

$$S(\frac{2\pi}{3}) = S(-\frac{\pi}{3}) = -(1 - \cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

(b) Koefficienterna b_n räknas enligt standarda formler för sinus-Fourierserier:

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} S(t)\,\sin(2nt)\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2nt) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin(2nt)\,dt =$$
$$= \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n) - \frac{2}{\pi(2n+1)} - \frac{2}{\pi(2n-1)}.$$

(c) Parsevals relation ger oss

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} |S(t)|^2\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos t)^2\,dt = 3 - \frac{8}{\pi}.$$

4. Funktionen $x(t)$ ges av formeln

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ om } |t| \leq 1; \\ 2 - |t| & , \text{ om } 1 < |t| \leq 2; \\ 0 & , \text{ om } |t| > 2. \end{cases}$$

(3p) (a) Rita grafer av funktioner $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$.

(4p) (b) Bestäm Fouriertransform av $x''(t)$ och beräkna därefter Fouriertransform $X(\omega)$ av funktionen $x(t)$.

(2p) (c) Visa m h av resultatet i (b) att 3-periodiska fortsättningen av x är konstant på hela reella axeln. Bestäm denna konstant.

Lösning. (a) Vi har

$$x'(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t < -2; \\ 1, & \text{om } -2 < t < -1; \\ 0, & \text{om } -1 < t < 1; \\ -1, & \text{om } 1 < t < 2; \\ 0, & \text{om } 2 < t. \end{cases}$$

Andra derivatan är

$$x''(t) = \delta(t+2) - \delta(t+1) - \delta(t-1) + \delta(t-2).$$

(b) Den andra derivatan $x''(t)$ har Fouriertransform $-\omega^2 X(\omega)$. Sista formeln för $x''(t)$ ger oss

$$-\omega^2 X(\omega) = e^{2i\omega} - e^{i\omega} - e^{-i\omega} + e^{-2i\omega} = 2\cos 2\omega - 2\cos\omega.$$

Detta ger oss

$$X(\omega) = \frac{2\cos\omega - 2\cos 2\omega}{\omega^2}.$$

(c) 3-periodiska fortsättningen $x_3(t)$ av funktionen x motsvarar till sampling av funktionen $\frac{2\pi}{3}X(\omega)$ i punkter $\omega_n = \frac{2\pi n}{3}$. Funktionen x_3 blir konstant om $X(\frac{2\pi n}{3}) = 0$ då $n \neq 0$ är heltal. Täljaren i formeln för $X(\omega)$ kan skrivas som

$$2\cos\omega - 2\cos 2\omega = 2\cos\omega - 4\cos^2\omega + 2 = -4z^2 + 2z + 2,$$

där $z = \cos\omega$. Om $\omega = \frac{2\pi n}{3}$, då är $z = 1$ eller $z = -1/2$ (detta ser man lätt på enhetscirkeln!). Både värdena $z = 1$ eller $z = -1/2$ ger oss $-4z^2 + 2z + 2 = 0$ vilket ger oss $X(\frac{2\pi n}{3}) = 0$ då $n \neq 0$.

Konstanten som antas av x_3 är

$$\frac{1}{3}X(0) = \frac{1}{3}\lim_{\omega\to 0} \frac{2\cos\omega - 2\cos 2\omega}{3\omega^2} = 1$$

(gränsvärdet kan beräknas t ex m h av L'Hospitals regel).

5. Ett linjärt tidsinvariant system (d v s ett LTI-system) transformerar insignalen $x_{\text{in}}(t) = e^{-t}\mathcal{U}(t)$ till utsignalen $x_{\text{ut}}(t) = e^{-3t}\mathcal{U}(t)$.

(4p) (a) Bestäm systemets pulssvar $h(t)$.

(5p) (b) Vad blir utsignalen då insignalen är $e^{-3t}\mathcal{U}(t)$?

Här $\mathcal{U}(t)$ är Heavisides funktion.

Lösning. (a) Insignalens Fouriertransform är

$$X_{\text{in}}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$$

och utsignalens Fouriertransform är

$$X_{\text{ut}}(\omega) = \frac{1}{3+i\omega}.$$

Om $h(t)$ är systemets pulssvar då uppfyller dess Fouriertransform $H(\omega)$

$$X_{\text{ut}}(\omega) = H(\omega) X_{\text{in}}(\omega).$$

Vi får då

$$H(\omega) = \frac{1 + i\omega}{3 + i\omega} = 1 - \frac{2}{3 + i\omega} = 1 - \frac{2}{3 + i\omega}.$$

Invers Fouriertransform ger oss

$$h(t) = \delta(t) - 2e^{-3t}\mathcal{U}(t).$$

(b) Om insignalen är $x(t) = e^{-3t}\mathcal{U}(t)$ då är

$$X(\omega) = \frac{1}{3 + i\omega}$$

och utsignalens Fouriertransform $Y(\omega)$ är

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{3 + i\omega} - \frac{2}{(3 + i\omega)^2}.$$

Invers Fouriertransform ger oss utsignalen

$$y(t) = e^{-3t}\mathcal{U}(t) - 2te^{-3t}\mathcal{U}(t).$$

6. En signal $x(t)$ är sådan att dess Fouriertransform $X(\omega)$ är nollskild endast i intervaller $-4 \leq \omega \leq -2$ eller $0 \leq \omega \leq 2$. Signalen x antar följande värdena i punkter $n\pi$, där n är heltal:

$$x(n\pi) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ -1, & n = -1; \\ 0, & n \neq \pm 1. \end{cases}$$

Bestäm värdena $x(m\pi/2)$, där m är godtyckligt heltal.

Lösning. Enligt information om värdena $x(n\pi)$ får vi för samplad signal med sampelavstånd π

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\pi)\delta(t - n\pi) = \delta(t - \pi) - \delta(t + \pi).$$

Fouriertransform av detta samband ger oss

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - 2k) = e^{-i\pi\omega} - e^{i\pi\omega} = -2i\sin(\omega\pi).$$

Information om X ger oss att

$$X(\omega) + X(\omega - 4) = -2i\pi\sin(\pi\omega)$$

då ω ligger i intervallet $[0, 2]$.

Sökta värdena $x(m\pi/2)$ kan återskapas genom att bilda samplad signal

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\pi/2)\delta(t - m\pi/2).$$

Den har 4-periodisk Fouriertransform

$$Y(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X(\omega - 4l).$$

Enligt information om $X(\omega)$ och beräkningen ovan hittar vi att

$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(X(\omega) + X(\omega - 4)) & \text{, då } 0 \leq \omega \leq 2; \\ 0 & \text{, då } 2 \leq \omega \leq 4. \end{cases} = \begin{cases} -4i\sin(\pi\omega) & \text{, då } 0 \leq \omega \leq 2; \\ 0 & \text{, då } 2 \leq \omega \leq 4. \end{cases}$$

På andra sidan

$$Y(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\pi/2)e^{-im\pi/2}.$$

Detta visar att värdena $x(-m\pi/2)$ är Fourierkoefficienter av 4-periodiska funktionen $Y(\omega)$. Vi får då

$$x(m\pi/2) = \frac{1}{4}\int_0^2 (-4i)\sin(\pi\omega)e^{im\omega\pi/2}\, d\omega$$

och beräkningen ger oss

$$x(m\pi/2) = \frac{i}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^m}{m^2/4 - 1}.$$

Sista formel gäller då $m \neq \pm 2$. Om $m = \pm 2$ då får vi enligt uppgiften $x(\pm\pi) = \pm 1$.