KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.
Onsdagen den 20 oktober 2004, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 moduler (uppgifter).
För godkänt krävs att 5 moduler är godkända.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelning på del 2: 11-14 ger 5 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng på del 2.
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2004. OBS!
Detta sker enligt följande: Godkänd modul nr i ger uppgift nr i godkänd, i=1, 2,...6.

Del 1

Modul1. I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant minus antalet djur gånger en annan konstant. Konstanterna är positiva. Ställ upp en matematisk modell för ovanstående.
Låt konstanterna därefter vara 5000 respektive 1.
Bestäm populationen som funktion av tiden t då den vid tiden 0 år lika med 1000.

Lösning:
Låt populationen vid tiden t vara $P(t)$.
Differentialekvationen blir $\frac{1}{P(t)}\frac{dP}{dt} = a - bP(t)$, $\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$.
Med de givna konstanterna insatta erhålles $\frac{dP}{dt} = 5000P - P^2$.
Differentialekvationen är av Bernoulli typ(den är även separabel).
Vi omformar differentialekvationen: $P^{-2}\frac{dP}{dt} = 5000P^{-1} - 1$.
Sätt $z = P^{-1}$, $\frac{dz}{dt} = -P^{-2}\frac{dP}{dt}$.
Insättning ger: $-\frac{dz}{dt} = 5000z - 1$, $\frac{dz}{dt} + 5000z = 1$, vilken är linjär med konstanta koefficienter.
Dess lösning erhålles som allmän homogen lösning plus en partikulärlösning.
Vi erhåller $z = \frac{A}{5000}e^{-5000\,t} + \frac{1}{5000} = \frac{Ae^{-5000\,t}+1}{5000}$. Populationen är $P(t) = \frac{5000}{Ae^{-5000\,t}+1}$.
Villkoret ger värdet på konstanten: $P(0) = \frac{5000}{A+1} = 1000$, $A = 4$.
SVAR: Populationen är $P(t) = \frac{5000}{4e^{-5000\,t}+1}$.

Modul2. Differentialekvationen $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, $x > 0$ satisfieras av funktionen $y_1 = x^2$.
Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $x^2y'' + xy' - 4y = 12x^4$, $x > 0$.

Lösning:
Vi ansätter $y = x^2z$.
Denna ansats sätter vi in i den inhomogena differentialekvationen och erhåller då den allmänna lösningen.
En annan variant är att sätta in i den homogena differentialekvationen och erhålla den allmänna homogena lösningen. Då återstår att bestämma en partikulärlösning vilken erhålles med variation av parametrar.

$$x^2\left\{x^2z'' + 2xz' + 2xz' + 2z\right\} + x\left\{x^2z' + 2xz\right\} - 4x^2z = 12x^4 \quad , \quad x^4z'' + 5x^3z' = 12x^4 .$$

Här kan ordningen reduceras. Vi sätter $u = z'$, $u' = z''$ och erhåller $x^4u' + 5x^3u = 12x^4$.
Differentialekvationen är linjär och vi omformar den så att vänstra ledet blir en derivata.
Multiplicera med x och integrera med avseende på x:

$$x^5u' + 5x^4u = 12x^5 \ , \ (x^5u)' = 12x^5 \ , \ x^5u = 2x^6 + A \ , \ u = 2x + Ax^{-5}.$$

Återsubstitution ger: $z' = 2x + Ax^{-5}$. Integrera med avseende på x: $z = x^2 + Bx^{-4} + C$.Den allmänna lösningen blir $y = x^2 z = x^2(x^2 + Bx^{-4} + C) = Cx^2 + Bx^{-2} + x^4$.
Här kan allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning identifieras.
SVAR: Den allmänna lösningen är $y = Cx^2 + Bx^{-2} + x^4$.

Modul3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 13y = 9\delta(t-5)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 4$ och $y'(0) = 1$. Här är $\delta(t-5)$ Diracs deltafunktion.
Lösning:
Vi Laplacetransformerar differentialekvationen.
$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 13Y(s) = 9e^{-5s}$.
Insättning av begynnelsevillkoren ger: $(s^2 + 4s + 13)Y(s) - 4s - 1 + 4(-4) = 9e^{-5s}$.
Lös ut $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{4s+17}{s^2+4s+13} + \frac{9e^{-5s}}{s^2+4s+13} = \frac{4(s+2)+3\cdot 3}{(s+2)^2+9} + \frac{9e^{-5s}}{(s+2)^2+9}$$

Återtransformera: $y(t) = 4e^{-2t}\cos 3t + 3e^{-2t}\sin 3t + U(t-5)\cdot 3e^{-2(t-5)}\sin 3(t-5)$.
SVAR: Differentialekvationens lösning är $y(t) = 4e^{-2t}\cos 3t + 3e^{-2t}\sin 3t + 3U(t-5)\cdot e^{-2(t-5)}\sin 3(t-5)$.

Modul4. Bestäm Fourierserien till den 2π-periodiska funktionen f som ges av
$f(x) = \sin 5x + |\sin x|$, $-\pi < x \le \pi$.
Lösning:

Den sökta Fourierserien är på formen: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$.
Den givna funktionen delas upp i två delar,
dels $f_1(x) = \sin 5x$, $-\pi < x \le \pi$ dels $f_2(x) = |\sin x|$, $-\pi < x \le \pi$.
Den första funktionen är sin egen Fourierserie.

Den andra funktionen är en jämn funktion. Dess Fourierserie är på formen $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$.

Enligt BETA 13.1. Nr10. är Fourierserien lika med $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$.

Den sökta Fourierserien är $\sin 5x + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$.

SVAR: Den sökta Fourierserien är $\sin 5x + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$.

Modul5. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{y}{2+x}\,dxdy$, där D definieras av olikheterna $0 \le x \le y \le \sqrt{8-x^2}$.

Lösning:
Vi börjar med y-integration och gränserna är då x respektive $\sqrt{8-x^2}$.
För att bestämma gränserna i x-led bestämmer vi skärningspunkten mellan kurvorna $y = x$ och $y = \sqrt{8-x^2}$.
Skärningspunkten är $(2,\ 2)$, ty $x \ge 0$.
Gränserna är: 0 respektive 2.
Dubbelintegralen blir

$$\iint_D \frac{y}{2+x}\,dxdy = \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=x}^{\sqrt{8-x^2}}\frac{y}{2+x}\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{2}\left[\frac{1}{2}\frac{y^2}{2+x}\right]_{y=x}^{\sqrt{8-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{2}\frac{8-x^2-x^2}{2+x}\,dx$$

$$\iint_D \frac{y}{2+x}\,dxdy = \int_{x=0}^{2}(2-x)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{2} = 4 - \frac{4}{2} = 2$$ SVAR: Dubbelintegralen $\iint_D \frac{y}{2+x}\,dxdy = 2$.

Modul6. Bestäm konstanten a så att vektorfältet

$$\mathbf{F} = \left(\frac{a}{1+2x+y^2},\ \frac{2y}{1+2x+y^2} \right)$$

får en potential U samt beräkna denna.

Ange med det beräknade värdet på konstanten a därefter värdet på linjeintegralen $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$,

där C är kurvan $y = x^2 - x$ från (0,0) till (2,2).

Lösning:

Betrakta ett område där singulära punkter saknas. Vi betraktar det högra halvplanet.

För att erhålla en potential U skall följande villkor vara uppfyllt:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{1+2x+y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{1+2x+y^2} \right)$$

Detta ger:

$$\frac{-a2y}{(1+2x+y^2)^2} = \frac{-2\cdot 2y}{(1+2x+y^2)^2}$$

Det ger oss att $a = 2$.

För en potential U gäller att $dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, dvs

$$dU = U'_x dx + U'_y dy = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Vi får i vårt fall följande system av partiella differentialekvationer.

$$\begin{cases} U'_x = \dfrac{2}{1+2x+y^2} \\ \\ U'_y = \dfrac{2y}{1+2x+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U(x,y) = \ln\left|1+2x+y^2\right| + g(y) \\ \\ U'_y = \dfrac{2y}{1+2x+y^2} + g'(y) \end{cases}$$

Identifiering ger $g'(y) = 0$, $g(y) = C$.

Den sökta potentialen är $U(x,y) = \ln\left|1+2x+y^2\right| + C$.

Vid beräkning av linjeintegralen utnyttjar vi potentialen.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C dU = U(2,2) - U(0.0) = \ln 9 - \ln 1 = \ln 9 = 2\ln 3$$

SVAR: Konstanten $a = 2$. Potentialen är $U(x,y) = \ln\left|1+2x+y^2\right| + C$. Linjeintegralen är $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\ln 3$.

Del 2

11. Antalet ugglor i mossen, $u(t)$, med t mätt i år, varierar med tillgången på gnagare.
Om inga gnagare alls finns avtar $u(t)$ med en hastighet som är proportionell mot $u(t)$.
Om gnagare finns minskas den föregående avtagandehastigheten med det konstanta talet a (antal per tidsenhet).

a) Ställ upp en differentialekvationen för $u(t)$ som gäller för $a \geq 0$.

b) Bestäm $u(t)$ för $t > 0$ då $u(0) = 100$, $a = 10\ln 10$ (≈ 23)
om man dessutom vet att $u(0) = 100$, $a = 0$ ger $u(1) = 10$.

c) Hur många ugglor i mossen kan anas i mossen efter mycket lång tid om $u(0) = 100$, $a = 10\ln 10$?

Lösning:

a) Vi erhåller differentialekvationen $\dfrac{du}{dt} = -(ku(t) - a)$, där k är en positiv konstant.

Vi omformar differentialekvationen: $\dfrac{du}{dt} + ku(t) = a$.

b) För $a = 0$ erhåller vi lösningen: $u(t) = u(0)e^{-kt}$.

Villkoren $u(0) = 100$, $a = 0$ ger $u(1) = 10$ ger : $10 = 100e^{-k1}$, $e^k = 10$, $k = \ln 10$.

För $a \neq 0$ erhåller vi lösningen: $u(t) = Ce^{-kt} + \dfrac{a}{k}$.

Villkoren $u(0) = 100$, $a = 10\ln 10$ (≈ 23) ger $100 = C + \dfrac{10\ln 10}{\ln 10}$, $C = 90$.

Den erhållna lösningen är $u(t) = 90e^{-t\ln 10} + 10 = 90 \cdot 10^{-t} + 10$.

Efter mycket tid blir antalet ugglor lika med 10.

SVAR: a) Differentialekvationen är $\dfrac{du}{dt} + ku(t) = a$.

b) Vid en godtycklig tid är antalet ugglor lika med $u(t) = 90 \cdot 10^{-t} + 10$.

c) Efter lång tid är antalet ugglor lika med 10.

12.a) Definiera begreppet fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation av ordning två.

b) Till en andra ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter har följande lösningar föreslagits : $y_1 = 3e^{-x} + 5e^{4x}$, $y_2 = 7e^{x^2}$, $y_3 = 4e^{-x} - 9e^{4x}$, $y_4 = 7(e^{2x})^2$.

Kommentera detta förslag samt bestäm en fundamentalmängd av lösningar.

c) Betrakta en linjär homogen differentialekvation med konstanta koefficienter som svarar mot fundamentalmängden av lösningar i b) och med koefficienten framför andraderivatan lika med ett. Bestäm den allmänna lösningen till motsvarande inhomogena differentialekvation, då dess högerled är $g(x) = 25e^{4x}$.

Lösning:

a) Fundamentalmängd av lösningar till den homogena linjära differentialekvationen av ordning två består av två linjärt oberoende lösningar till den linjära differentialekvationen av ordning två.

b) För en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter behövs två linjärt oberoende lösningar. En av de föreslagna lösningarna är ej möjlig, det är $y_2 = 7e^{x^2}$, ty lösningarna är på formen $y(x) = ae^{bx}$. Till de återstående behövs en bas av lösningar. Tag som $\{e^{-x},\ e^{4x}\}$ fundamentalmängd av lösningar.

$y_1 = 3e^{-x} + 5e^{4x}$, $y_3 = 4e^{-x} - 9e^{4x}$, $y_4 = 7(e^{2x})^2 = 7e^{4x}$ kan uttryckas som linjärkombinationer av fundamentalmängden.

c) Den karakteristiska ekvationen svarande mot fundamentallösningarna är $(r+1)(r-4) = 0$

Motsvarande homogena differentialekvation är $(D+1)(D-4)y = 0$ och den inhomogena differentialekvationen blir $(D+1)(D-4)y = 25e^{4x}$.

Sätt $y = e^{4x}z$, $e^{4x}(D+5)Dz = 25e^{4x}$, $(D+5)Dz = 25$.

Ansätt: $z_p = ax$. Detta ger efter insättning $z_p = 5x$.

En partikulärlösning är då $y_p = 5xe^{4x}$.

Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p = Ae^{-x} + Be^{4x} + 5xe^{4x}$.

SVAR: a) Se ovan. b) $\{e^{-x},\ e^{4x}\}$ fundamentalmängd av lösningar. c) $y = y_h + y_p = Ae^{-x} + Be^{4x} + 5xe^{4x}$.

13. Bestäm de kritiska punkterna till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + xy - 3x^2 \\ 4y - 2xy - y^2 \end{pmatrix}$.

Klassificera om möjligt dessa med avseende på typ och stabilitet.

Lösning:

Bestäm först de kritiska punkterna. Där är tangentvektorn lika med noll.

Vi erhåller då $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + xy - 3x^2 \\ 4y - 2xy - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1 + y - 3x) \\ y(4 - 2x - y) \end{pmatrix}$.

Detta icke-linjära system har lösningarna: (0,0), (0,4), (1/3,0) och (1,2).

Vi linjariserar det icke-linjära systemet genom att bestäma Jacobimatrisen i de aktuella punkterna.

Jacobimatrisen är lika med $\begin{pmatrix} 1 + y - 6x & x \\ -2y & 4 - 2x - 2y \end{pmatrix}$.

Insättning av respektive punkt ger följande matriser.
(0,0)

Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ har egenvärdena 1 och 4. Dessa är reella och skilda samt positiva.

Den kritiska punkten är en instabil nod . Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.
(0,4)

Matrisen $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$ har egenvärdena 5 och -4. Dessa är reella och med skilda tecken.

Den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.
(1/3,0)

Matrisen $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 0 & 10/3 \end{pmatrix}$ har egenvärdena -1 och 10/3. Dessa är reella och med skilda tecken.

Den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.
(1,2)

Matrisen $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ har egenvärdena enligt följande:

$$0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 10 = (\lambda + \frac{5}{2})^2 + 10 - (\frac{5}{2})^2 = (\lambda + \frac{5}{2})^2 + \frac{15}{4}$$

Egenvärdena är lika med $\lambda = \dfrac{-5 \pm i\sqrt{15}}{2}$. Dessa är komplexa och med negativ realdel.

Den kritiska punkten är en stabil spiral. Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: De kritiska punkterna är (0,0), (0,4), (1/3,0) och (1,2). Instabil nod är (0,0).
Sadelpunkt och därmed instabil är (0,4) och (1/3,0). Stabil spiral är (1,2).

14.a) Formulera divergenssatsen för vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

b) Visa divergenssatsen för tredjekomponenten i vektorfältet $\mathbf{F}$.

c) Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$, där $\mathbf{r} = (x,y,z)$ och $r = |\mathbf{r}|$ ut genom den slutna ytan S, dels i fallet då origo ligger innanför ytan S, dels då origo ligger utanför ytan S.

Lösning:

a) Divergenssatsen.
Låt K vara en kropp begränsad av den slutna ytan S.
Låt $\hat{\mathbf{n}}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till ytan S.
Låt vidare vektorfältet $\mathbf{F}$ ha kontinuerliga partiella derivator.

Då gäller: $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iiint_K div\, \mathbf{F}\, dxdydz$.

b) Vi beskriver den utåtriktade enhetsnormalen med hjälp av riktningscosiner,
dvs $\hat{\mathbf{n}} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ där vinklarna är vinkeln mellan den utåtriktade enhetsnormalen och respektive koordinataxel.

Vi antar att ytan S skäres i högst två punkter av linjer parallella av koordinataxlarna. I de fall ytan S skäres i fler än två punkter uppdelas området i delområden så delytorna skäres i högst två punkter.
Begränsningsytan S består av två delar:
$S_2 :\ z = z_2(x,y)$ begränsar K uppåt och $S_1 :\ z = z_1(x,y)$ begränsar K nedåt.
De uppåtriktade enhetsnormalerna till S_2 och S_1 bildar vinklarna γ_2 respektive γ_1 med positiva z-axeln.
Vi skall visa divergenssatsen för tredjekomponenten,

dvs visa att $\iint_S F_3(x,y,z) \cos\gamma\, d\sigma = \iiint_K \dfrac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z} dxdydz$ (1).

Vi integrerar först H.L. i (1) med avseende på z och erhåller en dubbelintegral vilken överföres till en ytintegral.

$$\iiint_K \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint_{D_{xy}}\left(\int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z}dz\right)dxdy = \iint_{D_{xy}} F_3(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint_{D_{xy}} F_3(x,y,z_1(x,y))dxdy$$

Dessa dubbelintegraler överföres till ytintegraler via sambandet $d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$, $dxdy = |\cos\gamma| d\sigma$.

$$\iiint_K \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint_{S_2} F_3(x,y,z_2(x,y))\cos\gamma\, d\sigma - \iint_{S_1} F_3(x,y,z_1(x,y))(-\cos\gamma)\, d\sigma$$

$$\iiint_K \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint_{S_2} F_3(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{S_1} F_3(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma = \iint_{S} F_3(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma$$ =V.L. i (1).

VSV.

c) Det givna vektorfältet, Coulombfältet, har en singulär punkt, origo.
Vi beräknar divergensen av vektorfältet.

$$div\mathbf{F} = div\frac{\mathbf{r}}{r^3} = grad\frac{1}{r^3}\cdot\mathbf{r} + \frac{1}{r^3}div\,\mathbf{r} = \frac{-3}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{r^3}3 = 0$$

Då origo ligger utanför ytan S kan divergenssatsen tillämpas och vi erhåller att flödet ut genom ytan S blir $\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iiint_K div\mathbf{F}dxdydz = 0$.

Då origo ligger innanför ytan S betraktas det område som ligger mellan ytan S och en lämplig yta som omsluter origo. Vi väljer en sfär, S_ε, med radien ε och med centrum i origo. I det nya området finns inga singulära punkter och divergenssatsen kan användas på detta område. Detta innebär att vi byter yta. Flödet ut genom yta S och ut genom yta S_ε är lika.

Utflödet blir $\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iint_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}d\sigma = \iint_{S_\varepsilon}\frac{1}{r^2}d\sigma$.

På ytan S_ε gäller att $r = \varepsilon$ och sfärytans area är lika med $4\pi\varepsilon^2$.

Vi erhåller då $\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iint_{S_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 = 4\pi$,

vilket ej förändras då sfärens radie går mot noll.
SVAR: a) och b) se ovan.
c) Utflödet är 4π då origo ligger innanför ytan S och 0 då origo ligger utanför ytan S.