Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.
Onsdagen den 20 oktober 2004, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 moduler (uppgifter).
För godkänt krävs att 5 moduler är godkända.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelning på del 2: 11-14 ger 5 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng på del 2.
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2004. OBS!
Detta sker enligt följande: Godkänd modul nr i ger uppgift nr i godkänd, i=1, 2,...6.
Bonuspoäng från hösten 2004 får tillgodoräknas på del 2.

- Modul1, LS1 – Kapitel 1-3 i Z.C.
- Modul2, LS2 – Kapitel 4, 8 och 10 i Z.C.
- Modul3, INL1 – Kapitel 7 i Z.C.
- Modul4, INL2 – Kapitel 11-12 i Z.C.
- Modul5, LS3 – Kapitel 9 i E.P.
- Modul6, LS4 – Kapitel 10-11 i E.P.

Del 1

Modul1.
I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant minus antalet djur gånger en annan konstant. Konstanterna är positiva. Ställ upp en matematisk modell för ovanstående.
Låt konstanterna därefter vara 5000 respektive 1.
Bestäm populationen som funktion av tiden t då den vid tiden 0 är lika med 1000.

Modul2.
Differentialekvationen $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, $x > 0$ satisfieras av funktionen $y_1 = x^2$.
Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $x^2y'' + xy' - 4y = 12x^4$, $x > 0$.

Modul3.
Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 13y = 9\delta(t-5)$
som uppfyller villkoren $y(0) = 4$ och $y'(0) = 1$. Här är $\delta(t-5)$ Diracs deltafunktion.

Modul4.
Bestäm Fourierserien till den 2π-periodiska funktionen f som ges av

$$f(x) = \sin 5x + |\sin x|, \quad -\pi < x \le \pi.$$

Modul5.
Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{y}{2+x}\,dxdy$, där D definieras av olikheterna $0 \le x \le y \le \sqrt{8 - x^2}$.

Modul6.
Bestäm konstanten a så att vektorfältet

$$\mathbf{F} = \left(\frac{a}{1+2x+y^2}, \frac{2y}{1+2x+y^2} \right)$$

får en potential U samt beräkna denna.
Ange med det beräknade värdet på konstanten a därefter värdet på linjeintegralen $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$,

där C är kurvan $y = x^2 - x$ från (0,0) till (2,2).

vgv

Del 2

11. Antalet ugglor i mossen, $u(t)$, med t mätt i år, varierar med tillgången på gnagare.
Om inga gnagare alls finns avtar $u(t)$ med en hastighet som är proportionell mot $u(t)$.
Om gnagare finns minskas den föregående avtagandehastigheten med det konstanta talet a (antal per tidsenhet).
a) Ställ upp en differentialekvationen för $u(t)$ som gäller för $a \geq 0$.
b) Bestäm $u(t)$ för $t > 0$ då $u(0) = 100$, $a = 10 \ln 10$ (≈ 23)
om man dessutom vet att $u(0) = 100$, $a = 0$ ger $u(1) = 10$.
c) Hur många ugglor i mossen kan anas i mossen efter mycket lång tid om $u(0) = 100$, $a = 10 \ln 10$?

12.a) Definiera begreppet fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation av ordning två.
b) Till en andra ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter har följande lösningar föreslagits : $y_1 = 3e^{-x} + 5e^{4x}$, $y_2 = 7e^{x^2}$, $y_3 = 4e^{-x} - 9e^{4x}$, $y_4 = 7(e^{2x})^2$.
Kommentera detta förslag samt bestäm en fundamentalmängd av lösningar.
c) Betrakta en linjär homogen differentialekvation med konstanta koefficienter som svarar mot fundamentalmängden av lösningar i b) och med koefficienten framför andraderivatan lika med ett. Bestäm den allmänna lösningen till motsvarande inhomogena differentialekvation, då dess högerled är $g(x) = 25e^{4x}$.

13. Bestäm de kritiska punkterna till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + xy - 3x^2 \\ 4y - 2xy - y^2 \end{pmatrix}$.
Klassificera om möjligt dessa med avseende på typ och stabilitet.

14.a) Formulera divergenssatsen för vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.
b) Visa divergenssatsen för tredjekomponenten i vektorfältet $\mathbf{F}$.
c) Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$, där $\mathbf{r} = (x, y, z)$ och $r = |\mathbf{r}|$ ut genom den slutna ytan S, dels i fallet då origo ligger innanför ytan S, dels då origo ligger utanför ytan S.