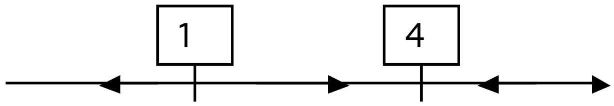
KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.
Lördagen den 30 oktober 2004, kl 0900-1400.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 3 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.
För godkänt krävs att 5 moduler är godkända.
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2004. OBS!
Detta sker enligt följande: Godkänd modul nr i ger uppgift nr i godkänd, i=1, 2,...6.

Del 3
Modul1.
I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, $P(t)$, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant, a, minus antalet djur gånger en annan konstant, b.
Konstanterna är positiva. Då erhålles $\dfrac{1}{P(t)}\dfrac{dP(t)}{dt} = a - bP(t)$.
Denna modell justeras genom att ett konstant antal djur per tidsenhet, h, avlägsnas.
Den justerade matematiska modellen blir $\dfrac{dP(t)}{dt} = (a - bP(t))P(t) - h$.
Låt konstanterna därefter vara 5, 1 respektive 4.
Studera långtidsbeteendet för olika startvärden på populationen.
Lösning:
Sätt in de givna konstanterna i differentialekvationen.
Då erhålles $\dfrac{dP}{dt} = (5 - P)P - 4 = -P^2 + 5P - 4 = (P - 1)(4 - P)$.
Vi bestämmer först kritiska punkter och studerar därefter derivatans tecken.
I de kritiska punkterna är derivatan lika med noll.
Vi erhåller två kritiska punkter $P = 1,\ P = 4$.
Nu över till studie av derivatans tecken.



Vi får följande population efter lång tid med startpopulationen P_0 : $\begin{cases} P_0 > 1: & P(t) \to 4,\ t \to \infty \\ P_0 = 1: & P(t) \to 1,\ t \to \infty \\ P_0 < 1: & P(t) \to 0,\ t \to \infty \end{cases}$.

SVAR: $\begin{cases} P_0 > 1: & P(t) \to 4,\ t \to \infty \\ P_0 = 1: & P(t) \to 1,\ t \to \infty \\ P_0 < 1: & P(t) \to 0,\ t \to \infty \end{cases}$.

Modul2.
Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.
Vad händer med en partikel som placeras i punkten (3,4) efter lång tid?
Lösning:
Vi bestämmer först egenvärdena till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = (\lambda + 1)^2 + 4$.
Egenvärdena är $\lambda = -1 \pm 2i$.
Vi bestämmer nu en egenvektor till egenvärdet $\lambda = -1 + 2i$.

Insättning av $\lambda = -1 + 2i$ i systemet $\begin{pmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix} -1-2i & -5 \\ 1 & 1-2i \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

En komplex lösning är $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ -1 \end{pmatrix}$

En komplex lösning till systemet av differentialekvationer ges av

$$\mathbf{Z} = e^{(-1+2i)t}\begin{pmatrix} 1-2i \\ -1 \end{pmatrix} = e^{-t}(\cos 2t + i\sin 2t)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Real- och imaginärdel ger oss två linjärt oberoende reella lösningar till systemet.

$$\operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ 0 \end{pmatrix}\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t + 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ 0 \end{pmatrix}\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t - 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$$

Linjärkombinationer av dessa två lösningar ger den allmänna lösningen.

$$\mathbf{X} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t + 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t - 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}.$$

En partikel placerad i punkten (3,4) kommer efter lång tid att hamna i origo, ty komplexa egenvärden med negativ realdel ger en inåtgående spiral.

SVAR: $\mathbf{X} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t + 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t - 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$. Partikeln hamnar i origo.

Modul3.

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 5U(t-3)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 3$. Här är $U(t-3)$ Heavisides stegfunktion.

Lösning:

Laplacetransformera:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = \frac{5}{s}e^{-3s}$$

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = s + 3 + 2 + \frac{5}{s}e^{-3s}$$

$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+5} + \frac{5}{s(s^2+2s+5)}e^{-3s} = \frac{s+1+4}{(s+1)^2+4} + \left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+5}\right)e^{-3s}$$

Återtransformera:

$$y(t) = e^{-t}\{\cos 2t + 2\sin 2t\} + U(t-3)\left[1 - e^{-(t-3)}(\cos 2(t-3) + \frac{1}{2}\sin 2(t-3))\right]$$

SVAR:

$$y(t) = e^{-t}\{\cos 2t + 2\sin 2t\} + U(t-3)\left[1 - e^{-(t-3)}(\cos 2(t-3) + \frac{1}{2}\sin 2(t-3))\right]$$

Modul4.

Lös den partiella differentialekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

som uppfyller randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t > 0$

och begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2\sin 3x + 7\sin 4x + \sin 7x$, $0 < x < \pi$.

Lösning:

Variabelseparation ger oss produktlösningar men vi utnyttjar BETA.

Den lösning till differentialekvationen och randvillkoren ges enligt BETA 10.9.Ex2 av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t}\sin nx$$

Begynnelsevillkoret ger $\sum_{n=1} c_n \sin nx = u(x,0) = 2\sin 3x + 7\sin 4x + \sin 7x$.

En direkt identifiering ger $c_3 = 2$, $c_4 = 7$, $c_7 = 1$ och övriga $c_n = 0$.

Vi får $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 7e^{-16t}\sin 4x + e^{-49t}\sin 7x$.

SVAR: $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 7e^{-16t}\sin 4x + e^{-49t}\sin 7x$.

Modul5.

Beräkna arean av den buktiga yta $z = 4 - x^2 - y^2$ för vilken $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Lösning:

Arean av den buktiga ytan ges av $\iint_S d\sigma$, där S är den aktuella ytan.

Vi projicerar ytan på xy-planet och erhåller en kvartscirkelskiva i första kvadranten. Cirkelskivans radie är lika med två.

Ytelementet $d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$, där $\cos\gamma$ är tredjekomponenten i enhetsnormalen.

Vi bestämmer en normal till rymdytan $z = 4 - x^2 - y^2$.

En normal ges av $\mathbf{n} = grad(x^2 + y^2 + z + 4) = (2x,\ 2y,\ 1)$.

En enhetsnormal är $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{(2x,\ 2y,\ 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$ och således $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$.

Ytintegralen övergår då i en dubbelintegral enligt följande $\iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dxdy$.

Inför polära koordinater: $\iint_S d\sigma = \iint_{D_{rv}} \sqrt{4r^2 + 1}\,rdrdv = \dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2}\right]_{r=0}^{2} = \dfrac{\pi}{24}(17\sqrt{17} - 1)$.

SVAR: Arean av den buktiga ytan är $\dfrac{\pi}{24}(17\sqrt{17} - 1)$.

Modul6.

Beräkna linjeintegralen $\int_C (x^2y + \dfrac{y^3}{3} + ye^{xy} + 3)dx + (x + xe^{xy})dy$,

där C är halvcirkelbågen $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ från punkten (1,0) till punkten (-1,0).

Lösning:

Vi sluter den givna kurva med en rät linje, L, från punkten (-1,0) till punkten (1,0).
Då erhålles en sluten kurva i positiv riktning och vektorfältet är kontinuerligt.
Vi använder Green´s formel och överför linjeintegralen till en dubbelintegral över det inneslutna området, D.

$$\oint_{C \cup L} (x^2y + \frac{y^3}{3} + ye^{xy} + 3)dx + (x + xe^{xy})dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + xe^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + \frac{y^3}{3} + ye^{xy} + 3)\right)dxdy$$

$$\int_C (x^2y + \frac{y^3}{3} + ye^{xy} + 3)dx + (x + xe^{xy})dy + \int_{x=-1}^{1} 3dx = \iint_D \{1 - x^2 - y^2\}dxdy$$

Vi inför polära koordinater i dubbelintegralen.

$$\int_C (x^2y + \frac{y^3}{3} + ye^{xy} + 3)dx + (x + xe^{xy})dy = -6 + \iint_{D_{rv}} \{1 - r^2\}rdrdv$$

Gränserna är $r:\ 0 \to 1$, $v:\ 0 \to \pi$.

$$\int_C (x^2y + \frac{y^3}{3} + ye^{xy} + 3)dx + (x + xe^{xy})dy = -6 + \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = -6 + \frac{\pi}{4}$$

SVAR: Den sökta linjeintegralen blir $-6 + \dfrac{\pi}{4}$