KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.
Lördagen den 30 oktober 2004, kl 0900-1400.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 3 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.
För godkänt krävs att 5 moduler är godkända.
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2004. OBS!
Detta sker enligt följande: Godkänd modul nr i ger uppgift nr i godkänd, i=1, 2,...6.

Del 3

Modul1.

I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, $P(t)$, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant, a, minus antalet djur gånger en annan konstant, b.
Konstanterna är positiva. Då erhålles $\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = a - bP(t)$.
Denna modell justeras genom att ett konstant antal djur per tidsenhet, h, avlägsnas.
Den justerade matematiska modellen blir $\frac{dP(t)}{dt} = (a - bP(t))P(t) - h$.
Låt konstanterna därefter vara 5, 1 respektive 4.
Studera långtidsbeteendet för olika startvärden på populationen.

Modul2.

Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.
Vad händer med en partikel som placeras i punkten (3,4) efter lång tid?

Modul3.

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 5U(t-3)$
som uppfyller villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 3$. Här är $U(t-3)$ Heavisides stegfunktion.

Modul4.

Lös den partiella differentialekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$
som uppfyller randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t > 0$
och begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2\sin 3x + 7\sin 4x + \sin 7x$, $0 < x < \pi$.

Modul5.

Beräkna arean av den buktiga yta $z = 4 - x^2 - y^2$ för vilken $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Modul6.

Beräkna linjeintegralen $\int_C (x^2 y + \frac{y^3}{3} + ye^{xy} + 3)dx + (x + xe^{xy})dy$,
där C är halvcirkelbågen $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ från punkten (1,0) till punkten (-1,0).