

Lösningförslag till tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210(5B1230).

Onsdagen den 12 januari 2005, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Fordringar: 3: 16-23p; 4: 24-30p; 5: 31-40p-, inklusive bonus.

Uppgifterna: 1 och 3 ger 4p; 2, 4-6 ger 3p; 7-9 ger 5p.

Bonuspoäng räknas från period 4 och period 1 2004.

1. Beräkna dubbelintegralen $\int_D \frac{e^{\frac{2x+y}{y-x}}}{(y-x)^3} dx dy$, där D är den parallelogram som

begränsas av sidorna $2x + y = 0$, $2x + y = 1$, $y - x = 1$ och $y - x = 2$.

Lösning:

$$u = 2x + y$$

Vi inför nya koordinater genom att sätta:

$$v = y - x$$

Vi erhåller då integrationsområdet i uv -planet $D_{uv} = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 2\}$

vilket är en kvadrat med axelparallella sidor.

Integrationsområdet i xy -planet ersätts med ett motsvarande integrationselement i uv -planet.Ytelementet $dxdy = \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv$ där $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ är Jacobideterminanten.Vi beräknar först Jacobideterminanten $\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ vilket ger den sökta Jacobideterminanten $\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \frac{1}{\frac{d(u, v)}{d(x, y)}} = \frac{1}{3}$ och ytelementet $dxdy = \frac{dudv}{|3|}$.

Nu över till dubbelintegralen.

$$\int_D \frac{e^{\frac{2x+y}{y-x}}}{(y-x)^3} dx dy = \frac{1}{3} \int_{D_{uv}} \frac{e^{\frac{u}{v}}}{v^3} dudv = \frac{1}{3} \int_{v=1}^2 \int_{u=0}^1 \frac{e^{\frac{u}{v}}}{v^3} du dv = \frac{1}{3} \int_{v=1}^2 \frac{e^{\frac{1}{v}} - 1}{v^2} dv = \frac{1}{3} \left[-e^{\frac{1}{v}} + \frac{1}{v} \right]_{v=1}^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \left(-\sqrt{e} + \frac{1}{2} + e - 1 \right) = \frac{1}{3} \left(e - \sqrt{e} - \frac{1}{2} \right)$$

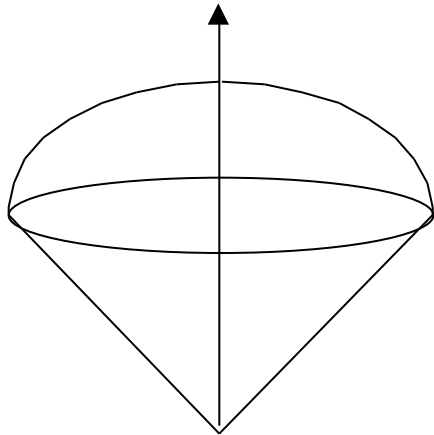
SVAR: Dubbelintegralen är $\int_D \frac{e^{\frac{2x+y}{y-x}}}{(y-x)^3} dx dy = \frac{1}{3} \left(e - \sqrt{e} - \frac{1}{2} \right)$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ ut ur kroppen som definieras av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ och $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Lösning:

Flödet ut ur kroppen, K , ges av flödesintegralen över begränsningsytan, S .Flödet = $\int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$, där $\hat{\mathbf{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till ytan S .Vi använder divergenssatsen och har då sambandet $\int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \int_K \text{div} \mathbf{F} dx dy dz$.Vi beräknar divergensen av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ och den ges av $\text{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x^3 + \frac{\partial}{\partial y} y^3 + \frac{\partial}{\partial z} z^3 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$.

$$\text{Flöde} = \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \int_K 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$



Vi beskriver kroppen K med sfäriskt polära koordinater.

$$K_{r\theta\varphi} = (r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\begin{aligned} \text{Flödet} &= \int_{K_{r\theta\varphi}} 3r^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{4^5}{5} \left[-\cos\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = 3\pi \cdot \frac{4^5}{5} (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

SVAR Utflödet är $= 3\pi \frac{4^5}{5} (2 - \sqrt{2})$.

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\frac{d}{dx}(xy) = y^2\sqrt{x}$ som uppfyller villkoret $y(1) = 1$.

Ange därefter lösningens existensintervall.

Lösning:

Vi utvecklar vänstra ledet och får: $xy' + y = y^2\sqrt{x}$.

Detta är en differentialekvation av Bernoulli typ.

Den triviala lösningen, $y = 0$, är ej av intresse i detta fall.

Omforma differentialekvationen genom att multiplicera med y^{-2} .

Då erhålles: $xy^{-2}y' + y^{-1} = \sqrt{x}$.

Sätt: $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$.

Insättning i differentialekvationen ger $-xz' + z = \sqrt{x}$, $xz' - z = -\sqrt{x}$.

Vi har fått en linjär differentialekvation och denna löses med hjälp av en integrerande faktor.

Först skriver vi om differentialekvationen på standardform: $z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Multiplicera med en integrerande faktor, $e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z = -\frac{1}{x\sqrt{x}}, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}z \right) = -x^{-\frac{3}{2}}$$

Integrera med avseende på x : $\frac{z}{x} = 2x^{-\frac{1}{2}} + C$, $z = 2\sqrt{x} + Cx$.

Men $z = y^{-1}$ ger: $y^{-1} = 2\sqrt{x} + Cx$.

Det givna villkoret ger: $1 = 2 + C$, $C = -1$.

Den sökta lösningen är $y = \frac{1}{2\sqrt{x} - x}$.

Lösningens existensintervall skall uppfylla följande villkor:

$x > 0$ och $2\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) > 0$ samt innehålla $x = 1$.

Detta ger oss intervallet $\{x : 0 < x < 4\}$.

SVAR: Differentialekvationens lösning är $y = \frac{1}{2\sqrt{x} - x}$ och dess existensintervall är $\{x : 0 < x < 4\}$.

4. Lös ekvationen

$$y(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau, \text{ då } y(0) = 1.$$

Lösning:

Vi Laplacetransformerar integrodifferentialekvationen.

$$sY(s) - y(0) = \frac{s}{s^2 + 1} + Y(s) \frac{s}{s^2 + 1}$$

Lös ut $Y(s)$ samt sätt in begynnelsevillkoret.

$$Y(s) \frac{s^3}{s^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + 1} + 1, \quad Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}.$$

Återtransformera:

$$y(t) = t + 1 + \frac{t^2}{2}.$$

SVAR: Integrodifferentialekvationens lösning är $y(t) = t + 1 + \frac{t^2}{2}$.

5. Betrakta differentialekvationen $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^4 e^x$, $x > 0$.

Motsvarande homogena differentialekvation har lösningar på formen $y = x^n$, där n är heltal.

Bestäm den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen.

Lösning:

Den allmänna lösningen erhålles som den allmänna homogena lösningen plus en partikulär lösning.

Vi sätter in $y = x^n$ i den homogena differentialekvationen $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$ och erhåller då följande ekvation $x^2 n(n-1)x^{n-2} - 4nx^{n-1} + 6x^n = 0$ vilken omformas till $(n(n-1) - 4n + 6)x^n = 0$.

Detta skall gälla för alla $x > 0$ vilket leder till ekvationen $n(n-1) - 4n + 6 = 0$, $n^2 - 5n + 6 = 0$.

Rötterna är $n = 2$ och $n = 3$.

Den allmänna lösningen till den homogena differentialekvationen är $y_h = c_1 x^2 + c_2 x^3$.

Den inhomogena differentialekvationen skrives först på standardform: $y'' - 4x^{-1}y' + 6x^{-2}y = x^2 e^x$, $x > 0$

Vi bestämmer en partikulärlösning med hjälp av metoden "variation av parameterar" och gör därvid ansatsen $y_p = u(x)x^2 + v(x)x^3$.

Då erhålles följande system:

$$\begin{matrix} x^2 & x^3 & u & v & \\ 2x & 3x^2 & u' & v' & \\ & & = & = & \\ & & & & x^2 e^x \end{matrix}$$

$$u = \frac{-x^5 e^x}{x^4} = -x e^x$$

Lös systemet. Cramers regel ger oss följande lösning:

$$v = \frac{x^4 e^x}{x^4} = e^x$$

Integrera med avseende på x :

$$\begin{matrix} u = -(x e^x - e^x) \\ v = e^x \end{matrix}$$

En partikulärlösningen blir $y_p = -(x e^x - e^x)x^2 + e^x x^3 = e^x x^2$.

Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p = c_1 x^2 + c_2 x^3 + e^x x^2$.

SVAR: Den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen ges av

$$y = y_h + y_p = c_1 x^2 + c_2 x^3 + e^x x^2.$$

6. Differentialekvationen $x + a((x)^3 - x) + x = 0$, där a är en reell parameter, kan omformas till ett system genom att sätta $y = x$. Då blir $y' = -a(y^3 - y) - x$. Det uppkomna systemet har endast en kritisk punkt. Bestäm denna och avgör för vilka värden på parametern a som den kritiska punkten är en spiral samt när denna är stabil respektive instabil.

Lösning:

Det uppkomna systemet är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x - a(y^3 - y) \end{pmatrix}$.

I kritiska punkter är $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Detta ger oss lösningen $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, dvs origo är den enda stationära punkten. Vi betraktar det linjariserade systemet, vilket erhålles genom att först beräkna Jacobimatrisen i den aktuella stationära punkten, origo.

Jacobimatrisen blir $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a(3y^2 - 1) \end{pmatrix}$. Insättning av origo ger matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

Vårt linjariserade system är $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \mathbf{X}$. Vi bestämmer matrisens egenvärden.

Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & a - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - a\lambda + 1 = \lambda - \frac{a}{2} + 1 - \frac{a^2}{4}$.

Egenvärdena är $\lambda = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-1 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. För att den stationära punkten skall vara en spiralpunkt

krävs att egenvärdena är komplexa med en realdel skild ifrån noll.

Komplexa egenvärden erhålles då $a^2 - 4 < 0$, dvs då $-2 < a < 2$.

För stabilitet krävs att realdelen av det komplexa egenvärdet är negativt och

för instabilitet krävs att realdelen av det komplexa egenvärdet är positivt.

Stabil spiralpunkt fås då $-2 < a < 0$ och instabil spiralpunkt fås då $0 < a < 2$.

Detta gäller för såväl det linjariserade systemet som för det icke-linjära systemet.

För parametervärdet $a = 0$ är origo en centrum i det linjariserade systemet.

Dock kan ingen slutsats dras för det icke-linjära systemet med utgångspunkt från detta.

Däremot övergår det icke-linjära systemet, med $a = 0$, till följande linjära system $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}$.

Detta har rent imaginära egenvärden och således erhålles en centrum.

SVAR: Den kritiska punkten är origo, (0,0).

Stabil spiralpunkt fås då $-2 < a < 0$ och instabil spiralpunkt fås då $0 < a < 2$.

7. Betrakta en smal stav. Låt dess temperatur ges av $u(x,t)$.

Dess ena ände hålles vid den konstanta temperaturen 0°C och dess andra ände är isolerad.

Vid tiden $t = 0$ är stavens temperatur $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0$$

Detta ger upphov till följande problem: $u(0,t) = 0, u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0, t > 0$.

$$u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.

Lösning:

Vi bestämmer lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i differentialekvationen ger $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = \lambda$.

Vi får ett system av ordinära differentialekvationer: $X''(x) - \lambda X(x) = 0$

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0$$

Dessa ekvationer är linjära med konstanta koefficienter och löses med karakteristisk ekvation.

Vi betraktar den första ekvationen och får tre skilda fall att undersöka.

Dessa är följande: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

$$\begin{array}{lll} \lambda = \mu^2, \mu \in \mathbb{R} & \lambda = 0 & \lambda = -\mu^2, \mu \in \mathbb{R} \\ X(x) - \mu^2 X(x) = 0 & X(x) = 0 & X(x) + \mu^2 X(x) = 0 \\ X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x} & X(x) = A_2 x + B_2 & X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x \end{array}$$

Randvillkoren och variabelseparationen ger oss följande villkor: $X(0)T(t) = 0$, $X(\frac{\pi}{2})T(t) = 0$, $t > 0$.

Dessa skall gälla för alla $t > 0$.

Detta ger: $X(0) = 0$, $X(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Nu över till de tre fallen. Vi behöver även derivatan $X'(x)$.

$$\begin{array}{lll} \lambda = \mu^2, \mu \in \mathbb{R} & \lambda = 0 & \lambda = -\mu^2, \mu \in \mathbb{R} \\ X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x} & X(x) = A_2 x + B_2 & X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x \\ X'(x) = \mu(A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x}) & X'(x) = A_2 & X'(x) = \mu(-A_3 \sin \mu x + B_3 \cos \mu x) \end{array}$$

Insättning av villkoren ger.

$$\begin{array}{lll} \lambda = \mu^2, \mu \in \mathbb{R} & \lambda = 0 & \lambda = -\mu^2, \mu \in \mathbb{R} \\ X(0) = A_1 + B_1 = 0 & X(0) = B_2 = 0 & X(0) = A_3 = 0 \\ X(\frac{\pi}{2}) = \mu(A_1 e^{\mu \frac{\pi}{2}} - B_1 e^{-\mu \frac{\pi}{2}}) = 0 & X(\frac{\pi}{2}) = A_2 = 0 & X(\frac{\pi}{2}) = \mu(-A_3 \sin \mu \frac{\pi}{2} + B_3 \cos \mu \frac{\pi}{2}) = 0 \\ B_1 = -A_1 & B_2 = 0 & A_3 = 0 \\ \mu A_1 (e^{\mu \frac{\pi}{2}} + e^{-\mu \frac{\pi}{2}}) = 0 & A_2 = 0 & \mu B_3 \cos \mu \frac{\pi}{2} = 0 \end{array}$$

Den enda icke-triviala lösningen erhålles i fallet $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Då erhålles $\mu = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ och lösningen har formen $X(x) = B_3 \sin(2n + 1)x$.

Motsvarande t -ekvation har lösningen $T(t) = C_3 e^{\lambda t} = C_3 e^{-(2n+1)t}$.

Vi får våra lösningar till den partiella differentialekvationen och som uppfyller de givna randvillkoren på formen $u_n(x, t) = X(x)T(t) = B_3 C_3 \sin(2n + 1)x e^{-(2n+1)t}$.

Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösningar.

Vi erhåller $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-(2n+1)t} \sin(2n + 1)x$.

Det återstår att bestämma koefficienterna.

Dessa erhålles med hjälp av det givna begynnelsevillkoret $u(x, 0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

Insättning ger: $u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(2n + 1)x = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

Identifiering ger att alla utom två koefficienter är lika med noll.

Vi får $b_1 = 2$ och $b_3 = 5$. Den sökta lösningen är $u(x, t) = 2e^{-9t} \sin 3x + 5e^{-49t} \sin 7x$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x, t) = 2e^{-9t} \sin 3x + 5e^{-49t} \sin 7x$.

8.a) Låt \mathbf{A} vara en reell matris.

Betrakta det homogena systemet av linjära differentialekvationer $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

En lösning till detta system ges av $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$, där \mathbf{X}_1 och \mathbf{X}_2 är reell- och vektorvärda funktioner.

Visa att även \mathbf{X}_1 och \mathbf{X}_2 uppfyller systemet.

b) Låt den reella matrisen \mathbf{A} ha egenvärdet $\lambda = \alpha + i\beta$ och

tillhörande egenvektor är $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$, där \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 är reella vektorer.

Visa utgående från detta hur två reella linjärt oberoende lösningar till systemet kan erhållas.

c) Bestäm allmänna lösningen till systemet $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$.

Lösning:

a) Vi vet att $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i \mathbf{X}_2$ satisfierar systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

Insättning ger $(\mathbf{X}_1 + i \mathbf{X}_2)' = \mathbf{A}(\mathbf{X}_1 + i \mathbf{X}_2)$.

Utnyttjandet av linjariteten hos deriveringen och matrismultiplikationen ger: $\mathbf{X}_1' + i \mathbf{X}_2' = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + i \mathbf{A}\mathbf{X}_2$.

$$\text{Re} : \mathbf{X}_1' = \mathbf{A}\mathbf{X}_1$$

Realdelen respektive imaginärdelen är:

$$\text{Im} : \mathbf{X}_2' = \mathbf{A}\mathbf{X}_2 \quad \text{vsv.}$$

b) En komplex lösning ges av

$$\mathbf{Z} = e^{(\alpha+i\beta)t} (\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) = e^{\alpha t} \{ \mathbf{v}_1 \cos \beta t - \mathbf{v}_2 \sin \beta t \} + i e^{\alpha t} \{ \mathbf{v}_1 \sin \beta t + \mathbf{v}_2 \cos \beta t \}$$

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger två reella linjärt oberoende lösningar.

$$\text{Re}\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 = e^{\alpha t} \{ \mathbf{v}_1 \cos \beta t - \mathbf{v}_2 \sin \beta t \}$$

$$\text{Im}\mathbf{Z} = \mathbf{X}_2 = e^{\alpha t} \{ \mathbf{v}_1 \sin \beta t + \mathbf{v}_2 \cos \beta t \}$$

c) Vi bestämmer först egenvärdena till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Dessa erhålles ur ekvationen } 0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 17 = (\lambda + 1)^2 + 16.$$

Egenvärdena är $\lambda = -1 \pm 4i$.

Vi bestämmer en egenvektor till egenvärdet $\lambda = -1 + 4i$.

$$\text{Denna fås ur ekvationen } \mathbf{0} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 5 & -3-\lambda \end{pmatrix} \mathbf{v} \text{ med } \lambda = -1 + 4i \text{ insatt.}$$

$$\text{Vi får } \begin{pmatrix} 2-4i & -4 \\ 5 & -2-4i \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}. \text{ En lösning är } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2i \end{pmatrix}.$$

$$\text{En komplex lösning är } \mathbf{Z} = e^{(-1+4i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2i \end{pmatrix} = e^{-t} (\cos 4t + i \sin 4t) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + i e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 4t - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \sin 4t + i e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 4t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cos 4t.$$

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger två reella linjärt oberoende lösningar.

$$\text{Re}\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 4t - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \sin 4t = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos 4t \\ \cos 4t + 2 \sin 4t \end{pmatrix}$$

$$\text{Im}\mathbf{Z} = \mathbf{X}_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 4t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cos 4t = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \sin 4t \\ \sin 4t - 2 \cos 4t \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen ges av en linjärkombination av de två linjärt oberoende lösningarna.

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos 4t \\ \cos 4t + 2 \sin 4t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \sin 4t \\ \sin 4t - 2 \cos 4t \end{pmatrix}$$

eller med hjälp av en fundamentalmatris

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \cos 4t & 2e^{-t} \sin 4t & c_1 \\ e^{-t} (\cos 4t + 2 \sin 4t) & e^{-t} (\sin 4t - 2 \cos 4t) & c_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_1 = e^{\alpha t} \{ \mathbf{v}_1 \cos \beta t - \mathbf{v}_2 \sin \beta t \}$$

SVAR: a) Se ovan . b) Två linjärt oberoende lösningar är

$$\mathbf{X}_2 = e^{\alpha t} \{ \mathbf{v}_1 \sin \beta t + \mathbf{v}_2 \cos \beta t \}$$

$$\text{c) Den allmänna lösningen är } \mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos 4t \\ \cos 4t + 2 \sin 4t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \sin 4t \\ \sin 4t - 2 \cos 4t \end{pmatrix}$$

9. En infektionssjukdom antas sprida sig i en sältam med en hastighet som är proportionell mot produkten av antalet infekterade och antalet icke-infekterade individer.

Låt andelen infekterade individer vara lika med $x(t)$.

Vid ett visst tillfälle var halva populationen infekterad och spridningshastigheten var då så stor att, om den förblev konstant, så skulle hela populationen vara infekterad efter 1 månad.

Hur stor del av populationen är i själva verket infekterad efter en månad?

Lösning:

Vi ställer upp den matematiska modellen och erhåller därvid

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t)(1 - x(t)), \text{ där } k \text{ är en konstant.}$$

Vi kallar den tidpunkt t vid vilken halva populationen är infekterad för $t = 0$ och väljer månad som tidsenhet.

Då är andelen infekterade lika med $x(0) = \frac{1}{2}$ och tillväxthastigheten $\frac{dx}{dt}(0) = \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$.

Insättning i differentialekvationen ger: $\frac{1}{2} = k \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2})$, vilket ger $k = 2$.

Nu går vi över till den uppställda differentialekvationen med insatt värde på k .

$\frac{dx}{dt} = 2x(1 - x)$ är separabel. Dess konstantlösningar saknar i detta fall intresse.

Omformning av differentialekvationen ger $\frac{1}{x(1-x)} \frac{dx}{dt} = 2$.

Partialbråksuppdelning ger $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \frac{dx}{dt} = 2$.

Integrera med avseende på t : $\ln|x| - \ln|1-x| = 2t + \ln|C_1|$.

Hyfsning ger $\ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = 2t + \ln|C_1|$, $\frac{1}{x(1-x)}$ 0 då $0 < x < 1$ ger $\frac{x}{1-x} = Ce^{2t}$.

Villkoret $x(0) = \frac{1}{2}$ ger $C = 1$.

Vi sätter in $C = 1$ i $\frac{x}{1-x} = Ce^{2t}$ och löser ut $x(t)$.

Då erhålles: $x(t) = \frac{e^{2t}}{1 + e^{2t}} = \frac{1}{1 + e^{-2t}}$.

Efter en månad är andelen infekterade lika med $x(1) = \frac{1}{1 + e^{-2}}$ 88 %.

SVAR: Andelen infekterade efter en månad är $x(1) = \frac{1}{1 + e^{-2}}$ 88 %.