

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210(5B1230).

Onsdagen den 12 januari 2005, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Fordringar: 3: 16-23p; 4: 24-30p; 5: 31-40p-, inklusive bonus.

Uppgifterna: 1 och 3 ger 4p; 2, 4-6 ger 3p; 7-9 ger 5p.

Bonuspoäng räknas från period 4 och period 1 2004.

1. Beräkna dubbelintegralen $\int_D \frac{e^{\frac{2x+y}{y-x}}}{(y-x)^3} dx dy$, där D är den parallelogram som

begränsas av sidorna $2x + y = 0$, $2x + y = 1$, $y - x = 1$ och $y - x = 2$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ ut ur kroppen som definieras av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ och $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\frac{d}{dx}(xy) = y^2 \sqrt{x}$ som uppfyller villkoret $y(1) = 1$.

Ange därefter lösningens existensintervall.

4. Lös ekvationen

$$y(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau, \text{ då } y(0) = 1.$$

5. Betrakta differentialekvationen $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^4 e^x$, $x > 0$.

Motsvarande homogena differentialekvation har lösningar på formen $y = x^n$, där n är heltal.

Bestäm den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen.

6. Differentialekvationen $x'' + a((x')^3 - x) + x = 0$, där a är en reell parameter, kan omformas till ett system genom att sätta $y = x'$. Då blir $y' = -a(y^3 - y) - x$. Det uppkomna systemet har endast en kritisk punkt. Bestäm denna och avgör för vilka värden på parametern a som den kritiska punkten är en spiral samt när denna är stabil respektive instabil.

7. Betrakta en smal stav. Låt dess temperatur ges av $u(x, t)$.Dess ena ände hålls vid den konstanta temperaturen 0°C och dess andra ände är isolerad.Vid tiden $t = 0$ är stavens temperatur $u(x, 0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0$$

Detta ger upphov till följande problem: $u(0, t) = 0$, $u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0$, $t > 0$.

$$u(x, 0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.

8.a) Låt \mathbf{A} vara en reell matris.

Betrakta det homogena systemet av linjära differentialekvationer $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

En lösning till detta system ges av $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i \mathbf{X}_2$, där \mathbf{X}_1 och \mathbf{X}_2 är reell- och vektorvärda funktioner.

Visa att även \mathbf{X}_1 och \mathbf{X}_2 uppfyller systemet.

b) Låt den reella matrisen \mathbf{A} ha egenvärdet $\lambda = \alpha + i\beta$ och

tillhörande egenvektor är $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$, där \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 är reella vektorer.

Visa utgående från detta hur två reella linjärt oberoende lösningar till systemet kan erhållas.

c) Bestäm allmänna lösningen till systemet $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$.

9. En infektionssjukdom antas sprida sig i en sälstam med en hastighet som är proportionell mot produkten av antalet infekterade och antalet icke-infekterade individer.

Låt andelen infekterade individer vara lika med $x(t)$.

Vid ett visst tillfälle var halva populationen infekterad och spridningshastigheten var då så stor att, om den förblev konstant, så skulle hela populationen vara infekterad efter 1 månad.

Hur stor del av populationen är i själva verket infekterad efter en månad?