KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1230.
Torsdagen den 26 maj 2005, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 moduler (uppgifter).
För godkänt krävs att 5 moduler är godkända.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelning på del 2: 11-14 ger 5 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng på del 2.
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN VÅREN 2005. OBS!
Detta sker enligt följande: Godkänd modul nr i ger uppgift nr i godkänd, i=1, 2,...6.
Bonuspoäng från våren 2005 får tillgodoräknas på del 2.

- -

Modul1, LS1	Kapitel 1-3 i Z.C.
Modul2, INL1	Kapitel 7 i Z.C.
Modul3, LS2	Kapitel 4, 8 och 10 i Z.C.
Modul4, INL2	Kapitel 11-12 i Z.C.
Modul5, LS3	Kapitel 9 i E.P.
Modul6, LS4	Kapitel 10-11 i E.P.

- -

Del 1

Modul1. Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' + 4y = x^4y^2$, $y(1) = 1$.

Lösning:

Vi har en differentialekvation av Bernoulli typ.
Omforma differentialekvationen: $xy^{-2}y' + 4y^{-1} = x^4$.
Gör substitutionen $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$ vilket ger $-xz' + 4z = x^4$.
Vi har erhållit en linjär differentialekvation vilken löses med hjälp av integrerande faktor. Skriv först ekvationen på standardform.
$z' - \dfrac{4}{x}z = -x^3$, en integrerande faktor är x^{-4}.
Multiplicera med integrerande faktorn: $x^{-4}z' - 4x^{-5}z = -x^{-1}$, $(x^{-4}z)' = -x^{-1}$.
Integration med avseende på x ger: $x^{-4}z = -\ln|x| + C$.
Vi återsubstituerar: $x^{-4}y^{-1} = -\ln|x| + C$. Villkoret ger $C = 1$.
Hyfsning ger $y = \dfrac{1}{x^4(1-\ln x)}$. Denna lösning är definierad då $x \neq 0$ och $x \neq e$.
Lösningens existensintervall är $\{x :\ 0 < x < e\}$.
SVAR: Den sökta lösning ges av $y = \dfrac{1}{x^4(1-\ln x)}$ då $0 < x < e$.

Modul2. Lös integralekvationen $y(t) + 3\int_0^t \sin(t-u)y(u)du = t$.

Lösning:

Laplacetransformera.

$$Y(s) + 3\frac{1}{s^2+1}Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Lös ut $Y(s)$: $Y(s) = \dfrac{s^2+1}{s^2(s^2+4)}$.

Partialbråksuppdela: $Y(s)=\dfrac{s^2+1}{s^2(s^2+4)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{s^2}+\dfrac{\frac{3}{4}}{s^2+4}$.

Återsubstituera: $y(t)=\dfrac{1}{4}t+\dfrac{3}{8}\sin 2t$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y(t)=\dfrac{1}{4}t+\dfrac{3}{8}\sin 2t$.

Modul3. En lösning till differentialekvationen
$xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=0$, $x>0$ ges av $y_1(x)=e^x$.
Bestäm en annan lösning $y_2(x)$ som är linjärt oberoende av $y_1(x)$.
Det linjära oberoendet skall verifieras.
Ange också den allmänna lösningen.

<u>Lösning:</u>

Vi använder reduktion av ordning.
Insättning av $y=e^x z$ i differentialekvationen ger
$x(e^x z''+2e^x z'+e^x z)-2(x+1)(e^x z'+e^x z)+(x+2)e^x z=0$, $x(z''+2z')-2(x+1)(z')=0$.
Sänk ordningen genom att sätta $u=z'$, $u'=z''$: $xu'-2u=0$.
Löses som linjär eller separabel: $u=C_1x^2$ eller $z'=C_1x^2$.
Integrera med avseende på x: $z=C_1\dfrac{x^3}{3}+C_2$.
Den allmänna lösningen till differentialekvationen är $y=(C_3x^3+C_2)e^x$.
Det linjära oberoendet visas med hjälp av Wronskianen:

$$W(e^x,e^x x^3)=\begin{vmatrix} e^x & e^x x^3 \\ e^x & e^x x^3+3e^x x^2 \end{vmatrix}=3e^{2x}x^2\neq 0\ ,\ x>0 .$$

$e^x x^3$ och e^x är linjärt oberoende.
SVAR: Den allmänna lösningen är $y=(C_3x^3+C_2)e^x$.

Modul4. Bestäm en funktion $u(x,y)$ som uppfyller differentialekvationen
$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+u$ och villkoret $u(x,0)=3e^{5x}+2e^{-3x}$.

<u>Lösning:</u>

Vi använder variabelseparation. Sätt $u(x,y)=X(x)Y(y)$.
Insättning ger: $X'(x)Y(y)=X(x)Y'(y)+X(x)Y(y)$.
Dividera med $X(x)Y(y)$: $\dfrac{X'(x)}{X(x)}=\dfrac{Y'(y)}{Y(y)}+1=\lambda$.
Den partiella differentialekvationen har omformats till ett system av ordinära differentialekvationer vilket skrives $\begin{cases} X'(x)=\lambda X(x) \\ Y'(y)=(\lambda-1)Y(y) \end{cases}$.

Detta har lösningen $\begin{cases} X(x)=Ae^{\lambda x} \\ Y(y)=Be^{(\lambda-1)y} \end{cases}$ och således $u(x,y)=ABe^{\lambda x+(\lambda-1)y}$.

Det givna villkoret ger oss lösningen $u(x,y)=3e^{5x+4y}+2e^{-3x-4y}$.
SVAR: Den sökta lösningen $u(x,y)=3e^{5x+4y}+2e^{-3x-4y}$.

Modul5. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^1 e^{-x^3}\, dx \right\} dy$.

<u>Lösning:</u>

Integrationsområdet ges av $\left\{(x,y):\ \sqrt{y} \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\right\}$.

Detta område kan även beskrivas som $\left\{(x,y):\ 0 \le y \le x^2,\ 0 \le x \le 1\right\}$.

Vi byter integrationsordning i dubbelintegralen.

$$\int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^1 e^{-x^3}\, dx \right\} dy = \int_{x=0}^1 \left\{ \int_{y=0}^{x^2} e^{-x^3}\, dy \right\} dx = \int_{x=0}^1 x^2 e^{-x^3}\, dx = \left[\frac{-1}{3} e^{-x^3} \right]_{x=0}^1 = \frac{1-e^{-1}}{3} = \frac{e-1}{3e}$$

SVAR: Dubbelintegralen är lika med $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^1 e^{-x^3}\, dx \right\} dy = \frac{e-1}{3e}$.

Modul6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{v} = grad\,(z^3)$ ut ur kroppen given av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $z \ge 0$.

Lösning:

Flödet ut ur kroppen ges av flödesintegralen $\Phi = \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{v}\ \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$, där S är kroppens yta och $\hat{\mathbf{n}}$ dess utåtriktade enhetsnormal.

Vi använder divergenssatsen och överför ytintegralen till en trippelintegral över den aktuella kroppen.

Formeln för divergenssatsen lyder $\Phi = \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{v}\ \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iiint_{\mathbf{K}} div\mathbf{v}\ \ dxdydz$, där K är den inneslutna kroppen.

Vektorfältet $\mathbf{v} = grad\,(z^3) = (0,0,3z^2)$ och dess divergens $div\mathbf{v} = 6z$.

Flödet $\Phi = \iiint_{\mathbf{K}} 6z\ \ dxdydz$.

Integrera först i z-led:

$$\Phi = \iiint_{\mathbf{K}} 6z\ \ dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z=0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 6z dz \right\} dxdy = 3\iint_{D_{xy}} (4 - x^2 - y^2)\, dxdy,$$

där $D_{xy} = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 4\right\}$.

Inför polära koordinater: $\Phi = 3\iint_{D_{r\theta}} (4 - r^2) r dr d\theta = 3\ \ 2\pi\ \ (2\ \ 2^2 - \dfrac{2^4}{4}) = 6\pi\ \ 4 = 24\pi$.

SVAR: Flödet ut ur kroppen är $\Phi = 24\pi$.

<u>Del 2</u>

11. I en stock, som har formen av en rät cirkulär cylinder, med radien 20 cm, gör man två sågskär. Det första går i rät vinkel mot cylinderns axel, det andra bildar 60° vinkel med det första. Bestäm volymen av det bortsågade stycket om skären möts på en rät linje genom cylinderns axel.

<u>Lösning:</u>

Sätt radien lika med r och låt stocken ha ekvationen $x^2 + y^2 \le r^2$ samt låt sågskären ha ekvationerna $z = 0$ respektive $z = x\sqrt{3}$. Vi erhåller då volymen av det bortsågade stycket.

Denna blir $V=\iiint\limits_K dxdydz=\iint\limits_D (x\sqrt{3}-0)dxdy$, där $D=\left\{(x,y):\ \ x^2+y^2\le r^2,\ x\ge 0\right\}$.

$$V=\iint\limits_D (x\sqrt{3}-0)dxdy=\sqrt{3}\int_{y=-r}^{r}\left\{\int_{x=0}^{\sqrt{r^2-y^2}} xdx\right\}dy=\sqrt{3}\,\frac{1}{2}\int_{y=-r}^{r}(r^2-y^2)dy$$

$$V=\sqrt{3}\int_{y=0}^{r}(r^2-y^2)dy=\sqrt{3}(r^3-\frac{r^3}{3})=\frac{2r^3\sqrt{3}}{3}$$

Insättning av det numeriska värdet på radien ger följande volym: $V=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{dm}^3$.

SVAR: Det bortsågade stycket har volymen $V=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{dm}^3$.

12. Ett icke-homogent system av differentialekvationer kan skrivas $\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}$. Härled en partikulärlösning, då en fundamentalmatris till systemet ges av $\Phi(t)$.
Ange även den allmänna lösningen.

Tillämpa därefter ovanstående på systemet $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}e^t\\ e^t\end{pmatrix}$.

<u>Lösning:</u>
Den allmänna homogena lösningen ges av $\mathbf{x}_h=\Phi(t)\mathbf{C}$,
där $\mathbf{C}$ är en konstant kolonnvektor.
Vid härledning av en partikulärlösning ansätter vi att partikulärlösningen har formen $\mathbf{x}_p=\Phi(t)\mathbf{U}(t)$.
Insättning i det inhomogena systemet $\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}$ ger
$\Phi'(t)\mathbf{U}(t)+\Phi(t)\mathbf{U}'(t)=\mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{U}(t)+\mathbf{f}$
$\Phi(t)$ är en fundamentalmatris vars kolonner uppfyller det homogena systemet $\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}$, dvs $\Phi'(t)=\mathbf{A}\Phi(t)$.
Vi får då $\Phi(t)\mathbf{U}'(t)=\mathbf{f}$. Multiplicera ekvationen från vänster med inversen till fundamentalmatrisen. Denna existerar ty $\det\Phi(t)\neq 0$ eftersom fundamentalmatrisen består av linjärt oberoende kolonner som är lösningar till det homogena systemet.
Systemet blir $\mathbf{U}'(t)=\Phi^{-1}(t)\mathbf{f}$.
Integrera med avseende på t: $\mathbf{U}(t)=\int\Phi^{-1}(t)\mathbf{f}dt$.
Partikulärlösningen blir: $\mathbf{x}_p=\Phi(t)\int\Phi^{-1}(t)\mathbf{f}dt$.
Systemets allmänna lösning ges av $\mathbf{x}=\mathbf{x}_h+\mathbf{x}_p=\Phi(t)\mathbf{C}+\Phi(t)\int\Phi^{-1}(t)\mathbf{f}dt$.
Nu över till tillämpningen.
Först bestämmer vi en fundamentalmatris.
Bestäm först egenvärdena till matrisen $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.
Dessa fås ur ekvationen $0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)$.
Matrisens egenvektorer fås ur ekvationen $\begin{pmatrix}1-\lambda & 4\\ 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

Vi startar med egenvärdet $\lambda = 1$. Insättning ger: $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Egenvärdet $\lambda = 2$ ger: $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En fundamentalmatris ges av $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$.

Inversen till fundamentalmatrisen blir $\Phi^{-1}(t) = e^{-3t}\begin{pmatrix} e^{2t} & -4e^{2t} \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -4e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$.

En partikulärlösning är

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} e^t & 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} e^{-t} & -4e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^t & 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -3 \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^t & 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3t \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3t-4)e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen ges av

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} e^t & 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\mathbf{C} + \begin{pmatrix} (-3t-4)e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

SVAR: För härledningen se ovan.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} e^t & 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\mathbf{C} + \begin{pmatrix} (-3t-4)e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$

13. Värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(0,t) = 0 \ , \ u(1,t) = 10 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

kan lösas genom att man sätter $v(x,t) = u(x,t) - 10x$.

a. Visa att $v(x)$ uppfyller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ v(0,t) = 0 \ , \ v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = -10x \end{cases} .$$

b. Lös P.D.E.-problemet för v och bestäm sedan u .

<u>Lösning:</u>

a. Insättning av $v(x,t) = u(x,t) - 10x$ i $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ ger $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v}{\partial t}$,

ty $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ och $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - 10$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Vidare erhålles:

$v(0,t) = u(0,t) = 0$, $v(1,t) = u(1,t) - 10 = 10 - 10 = 0$ och

$v(x,0) = u(x,0) - 10x = 0 - 10x = -10x$.

Därmed är a. visad.

b. Vi använder variabelseparation. Sätt $v(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i den partiella differentialekvationen ger: $X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \text{konstant} = \lambda$.

Vi erhåller ett system av linjära okopplade differentialekvationer:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}.$$

"T-ekvationen" har lösningen: $T(t) = Ce^{\lambda t}$.

För "X-ekvationen" behandlas tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$
$\boldsymbol{X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}}$	$\boldsymbol{X(x) = A_2 x + B_2}$	$\boldsymbol{X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x}$

Villkoren $v(0,t) = v(1,t) = 0$ ger tillsammans med variabelseparationen att $X(0)T(t) = X(1)T(t) = 0$. Detta skall gälla för alla $\boldsymbol{t}$: $X(0) = X(1) = 0$.

Insättning ger:

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$
$\begin{cases} 0 = X(0) = A_1 + B_1 \\ 0 = X(1) = A_1 e^{\mu} + B_1 e^{-\mu} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = X(0) = B_2 \\ 0 = X(1) = A_2 + B_2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = X(0) = A_3 \\ 0 = X(1) = A_3 \cos \mu + B_3 \sin \mu \end{cases}$
Triviala lösningen.	Triviala lösningen.	$\begin{cases} A_3 = 0 \\ \mu = n\pi \end{cases} \quad X(x) = B_3 \sin n\pi x$

Motsvarande "T-lösningar" blir:

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$
		$T(t) = C_3 e^{-(n\pi)^2 t}$

Vi har erhållit

$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$
$v(x,t) = B_3 \sin n\pi x \ \ C_3 e^{-(n\pi)^2 t}$

Linjärkombinationer av lösningar är lösning.

Den lösning som uppfyller de givna randvillkoren är på formen:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \ \ e^{-(n\pi)^2 t}$$

Begynnelsevillkoret $v(x,0) = -10x$ ger:

$$-10x = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

Koefficienterna är:

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 -10x \sin n\pi x dx = 20\left\{ \left[x \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right]_{x=0}^{1} - \int_0^1 1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi} dx \right\} = 20 \frac{\cos n\pi}{n\pi} = \frac{20(-1)^n}{n\pi}.$$

Vi får

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20(-1)^n}{n\pi} \sin n\pi x \ \ e^{-(n\pi)^2 t}$$

Vilket ger

$$u(x,t) = 10x + v(x,t) = 10x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20(-1)^n}{n\pi} \sin n\pi x \ \ e^{-(n\pi)^2 t}$$

SVAR: a. Se ovan. b. Den sökta lösningen ges av

$$u(x,t) = 10x + v(x,t) = 10x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20(-1)^n}{n\pi} \sin n\pi x \ \ e^{-(n\pi)^2 t}.$$

14. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen

$y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, $y > 0$, där $a = 4$ [år] och $b = 80$ [ton].

Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).

a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.

b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas om det skall finnas någon jämviktslösning > 0.

c. Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk. Bestäm y_0 som funktion av c.

Lösning:

a. Den korrigerade differentialekvationen blir $y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right) - c$.

Med de givna värdena på konstanterna får vi

$y' = \frac{y}{4}\left(1 - \frac{y}{80}\right) - c = \frac{y(80 - y)}{320} - c = \frac{y(80 - y) - 320c}{320} = f(y)$.

b. Jämviktslösning erhålles då $f(y) = 0$.

Då är $y^2 - 80y + 320c = 0$, $(y - 40)^2 = 1600 - 320c = 320(5 - c)$.

Reella lösningar och större än noll erhålles då $c \leq 5$.

För $c > 5$ existerar inga jämviktslösningar.

Jämviktslösningarna är $y = 40 \pm \sqrt{320(5 - c)}$.

c. Vi bestämmer den stabila jämviktslösningen y_0 genom att studera tecknet hos $f'(y_0)$.

Jämviktslösningen är stabil om $f'(y_0) < 0$ och instabil om $f'(y_0) > 0$.

$f'(y) = \frac{80 - 2y}{320} = \frac{40 - y}{160}$ och insättning av jämviktslösningarna ger

$f'(40 + \sqrt{320(5 - c)}) = \frac{-\sqrt{320(40 - c)}}{160} < 0$ stabil jämviktslösning.

$f'(40 - \sqrt{320(5 - c)}) = \frac{\sqrt{320(40 - c)}}{160} > 0$ instabil jämviktslösning.

SVAR: a. Den nya differentialekvationen är $y' = \frac{y(80 - y)}{320} - c$.

b. Det kritiska värde på c är $c = 5$.

c. Jämviktsnivån $y_0 = 40 + \sqrt{320(5 - c)}$.