KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1230.

Torsdagen den 26 maj 2005, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 moduler (uppgifter).
För godkänt krävs att 5 moduler är godkända.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelning på del 2: 11-14 ger 5 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng på del 2.
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN VÅREN 2005. OBS!
Detta sker enligt följande: Godkänd modul nr i ger uppgift nr i godkänd, i=1, 2,...6.
Bonuspoäng från våren 2005 får tillgodoräknas på del 2.

- -

Modul1, LS1	Kapitel 1-3 i Z.C.
Modul2, INL1	Kapitel 7 i Z.C.
Modul3, LS2	Kapitel 4, 8 och 10 i Z.C.
Modul4, INL2	Kapitel 11-12 i Z.C.
Modul5, LS3	Kapitel 9 i E.P.
Modul6, LS4	Kapitel 10-11 i E.P.

- -

Del 1

Modul1. Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' + 4y = x^4y^2$, $y(1) = 1$.

Modul2. Lös integralekvationen $y(t) + 3\int_0^t \sin(t-u)y(u)du = t$.

Modul3. En lösning till differentialekvationen
$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, $x > 0$ ges av $y_1(x) = e^x$.
Bestäm en annan lösning $y_2(x)$ som är linjärt oberoende av $y_1(x)$.
Det linjära oberoendet skall verifieras.
Ange också den allmänna lösningen.

Modul4. Bestäm en funktion $u(x,y)$ som uppfyller differentialekvationen
$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + u$ och villkoret $u(x,0) = 3e^{5x} + 2e^{-3x}$.

Modul5. Beräkna dubbelintegralen $\int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^1 e^{-x^3}\, dx \right\} dy$.

Modul6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{v} = grad\,(z^3)$ ut ur kroppen given av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.

Del 2

11. I en stock, som har formen av en rät cirkulär cylinder, med radien 20 cm, gör man två sågskär. Det första går i rät vinkel mot cylinderns axel, det andra bildar 60° vinkel med det första. Bestäm volymen av det bortsågade stycket om skären möts på en rät linje genom cylinderns axel.

12. Ett icke-homogent system av differentialekvationer kan skrivas $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$. Härled en partikulärlösning, då en fundamentalmatris till systemet ges av $\Phi(t)$.
Ange även den allmänna lösningen.
Tillämpa därefter ovanstående på systemet $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$.

13. Värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(0,t) = 0\,,\ u(1,t) = 10 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

kan lösas genom att man sätter $v(x,t) = u(x,t) - 10x$.

a. Visa att $v(x)$ uppfyller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ v(0,t) = 0\,,\ v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = -10x \end{cases}.$$

b. Lös P.D.E.-problemet för v och bestäm sedan u .

14. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen

$y' = \dfrac{y}{a}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right)$, $y > 0$, där $a = 4$ [år] och $b = 80$ [ton].

Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).

a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.
b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas om det skall finnas någon jämviktslösning > 0.
c. Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk. Bestäm y_0 som funktion av c.