KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210(5B1230).

Tisdagen den 23 augusti 2005, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 16-23p; 4: 24-30p; 5: 31p-.
Uppgifterna: 1, 3-4 och 6 ger 4p; 2, 5 och 7 ger 3p; 8-9 ger 5p.
Bonuspoäng räknas från period 1 2004 eller period 4 2005.
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

1. En 500 liters tank innehåller ursprungligen 10 gram salt löst i 200 liter vatten. En saltlösning med koncentrationen 0.25 gram per liter pumpas in i tanken med en hastighet av 4 liter per minut. Den välblandade lösningen pumpas ut med en hastighet av 2 liter per minut. När är tanken full ? Ställ upp en differentialekvation för mängden av salt $Q(t)$. Bestäm koncentrationen $K(t)$ gram per liter i tanken vid en godtycklig tidpunkt t .

<u>Lösning</u>:

Tanken är full då det har pumpats in 500-200=300 liter lösning.
Detta inträffar efter 300/(4-2)=150 minuter.
Vätskevolymen i tanken vid en godtycklig tidpunkt t ges av $L(t)=200+2t$.
Differentialekvationen för mängden salt $Q(t)$ ges av

$$\frac{dQ}{dt}=0.25(\text{g/l})\ \ 4(l/\min)-\frac{Q(t)}{L(t)}(\text{g/l})\ \ 2(\text{l/min})=1-\frac{Q(t)}{100+t}.$$

Vi har erhållit en linjär differentialekvation.

Den kan skrivas $\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{Q(t)}{100+t}=1$, $(100+t)\dfrac{dQ}{dt}+Q(t)=100+t$, $\dfrac{d}{dt}\{(100+t)Q(t)\}=100+t$

.

Integration med avseende på t ger $(100+t)Q(t)=\dfrac{(100+t)^2}{2}+C$.

Vid tiden $t=0$ är $Q=10$ vilket ger att $C=100\ \ 10-\dfrac{100^2}{2}=-4000$.

Mängden salt vid en godtycklig tidpunkt t ges av $Q(t)=\dfrac{100+t}{2}-\dfrac{4000}{100+t}$

Koncentrationen $K(t)=\dfrac{Q(t)}{L(t)}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2000}{(100+t)^2}$.

SVAR: Tanken är tom efter 150 minuter. Koncentrationen $K(t)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2000}{(100+t)^2}$ gram per liter.

2. Bestäm de stationära lösningarna till differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx}=(y-1)(y-2)(y-3)$ samt avgör om de är stabila eller instabila.

<u>Lösning</u>:

Stationära lösningar erhålles då derivatan är lika med noll, dvs då $y=1$, $y=2$ och $y=3$.
Vi studerar derivatans tecken.

$y>3$: $\dfrac{dy}{dx}>0$, y är växande.

$3>y>2$: $\dfrac{dy}{dx}<0$, y är avtagande.

$2>y>1$: $\dfrac{dy}{dx}>0$, y är växande.

$1>y$: $\dfrac{dy}{dx}<0$, y är avtagande.

De stationära lösningarna $y=1$ och $y=3$ är instabila och den stationära lösningen $y=2$ är stabil.
SVAR: $y=1$ och $y=3$ är instabila och $y=2$ är stabil.

3. Bestäm jämviktspunkterna till systemet $\begin{cases} x'(t) = 2xy \\ y'(t) = -x+3y+1 \end{cases}$
och deras art(sadel/nod/spiral , stabil/instabil) .
Lösning:
I jämviktspunkterna är tangentvektorn(hastighetsvektorn) lika med nollvektorn.
Vi får $\begin{cases} 0 = 2xy \\ 0 = -x+3y+1 \end{cases}$ vilket ger oss två jämviktspunkter $(0,-\frac{1}{3})$ och $(1,0)$.
För att undersöka jämviktspunkternas art studerar vi det linjariserade systemet, vilket sker genom att vi studerar Jacobimatrisen (funktionalmatrisen) i de aktuella punkterna.
Jacobimatrisen är lika med $\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$(0,-\frac{1}{3})$

Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ är diagonal och har reella, skilda egenvärden med olika tecken. Jämviktspunkten $(0,-\frac{1}{3})$ är en sadelpunkt och därmed instabil.

$(1,0)$

Matrisen $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ger information rörande dess egenvärden. Dessa erhålles ur ekvationen

$$0 = \det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2).$$

Egenvärdena är reella, positiva och skilda.
Jämviktspunkten $(1,0)$ är en instabil nod.
SVAR: Jämviktspunkterna är $(0,-\frac{1}{3})$, en sadelpunkt och därmed instabil, och $(1,0)$ är instabil nod.

b. Lös begynnelsevärdesproblemet $y''(t)+y(t) = f(t)$, $y(0)=2$, $y'(0)=-1$, $t \geq 0$, där

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ , \ 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -1 \ , \ t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Beräkna även $y(\frac{3\pi}{2})$.

Lösning:
Vi använder oss av Laplacetransformation för att lösa problemet.
Vi omformar $f(t)$ med hjälp av Heavisides stegfunktion $U(t-a)$.

Vi får $f(t) = 1-2U(t-\frac{\pi}{2})$, vars Laplacetransform är $F(s) = \dfrac{1-2e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s}$.
Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = F(s)$.

Lös ut $Y(s)$: $Y(s) = \dfrac{2s-1}{s^2+1} + \dfrac{F(s)}{s^2+1} = \dfrac{2s-1}{s^2+1} + \dfrac{1-2e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s(s^2+1)}$.

Partialbråksuppdelning ger: $Y(s)=\dfrac{2s-1}{s^2+1}+\left\{\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}\right\}(1-2e^{-s\frac{\pi}{2}})$.

Återtransformera: $y(t)=2\cos t-\sin t+1-\cos t-2U(t-\dfrac{\pi}{2})(1-\cos(t-\dfrac{\pi}{2}))$.

Förenkling ger: $y(t)=\cos t-\sin t+1-2U(t-\dfrac{\pi}{2})(1-\sin t)$.

$$y(\frac{3\pi}{2})=\cos\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}+1-2U(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(1-\sin\frac{3\pi}{2})=0+1+1-2\;2=-2$$

SVAR: Den sökta lösningen är $y(t)=\cos t-\sin t+1-2U(t-\dfrac{\pi}{2})(1-\sin t)$. $y(\dfrac{3\pi}{2})=-2$.

5. Beräkna volymen av det område som begränsas av paraboloiderna $z=8-x^2-y^2$ och $z=x^2+y^2$.

Lösning:

Volymen ges av trippelintegralen $V=\iiint\limits_K dxdydz$ där K är det område vars volym skall bestämmas.

Vi bestämmer först integrationsområdet xy-planet.

$z=8-x^2-y^2=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$.

Området är i xy-planet är en cirkelskiva med centrum i (0,0) och med radien lika med två.

Vi påbörjar integrationen i z-led: $V=\iiint\limits_K dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}\left\{\int\limits_{z=x^2+y^2}^{8-x^2-y^2}dz\right\}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\left\{8-2x^2-2y^2\right\}dxdy$

Inför polära koordinater.

$$\begin{cases}x=r\cos v\\ y=r\sin v\end{cases}\qquad dxdy=rdrd\theta\qquad\begin{cases}r:\ 0\to 2\\ \theta:\ 0\to 2\pi\end{cases}$$

$$V=\iint\limits_{D_{r\theta}}\left\{8-2r^2\right\}rdrd\theta=2\;2\pi\int\limits_{r=0}^{2}(4r-r^3)dr=4\pi\;(8-4)=16\pi$$

SVAR: Volymen av området mellan paraboloiderna är $V=16\pi$.

6. En partikels läge ges av systemet $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}4&-5\\5&-2\end{pmatrix}\mathbf{X}$, där $\mathbf{X}$ anger partikelns läge i planet. Vidare gäller att partikeln befinner sig i punkten $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ vid tiden $t=0$. Bestäm partikelns läge vid en godtycklig tidpunkt t samt avgör vad som händer med partikeln efter lång tid.

Lösning:

Vi bestämmer först matrisens egenvärden.

Dessa erhålles ur ekvationen $0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}4-\lambda&-5\\5&-2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+17=(\lambda-1)^2+16$.

Egenvärdena är komplexa och lika med $\lambda=1\pm 4i$.

Välj ett av egenvärdena och bestäm tillhörande egenvektor.

Vi väljer $\lambda=1+4i$.

En egenvektor erhålles ur ekvationen $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}$ med egenvärdet insatt.

$$\begin{pmatrix}4-1-4i&-5\\5&-2-1-4i\end{pmatrix}\mathbf{v}=0\ ,\ \begin{pmatrix}3-4i&-5\\5&-3-4i\end{pmatrix}\mathbf{v}=0\ ,\ \mathbf{v}=\begin{pmatrix}3+4i\\5\end{pmatrix}.$$

En komplex lösning är $\mathbf{Z} = e^{(1+4i)t}\begin{pmatrix} 3+4i \\ 5 \end{pmatrix} = e^{t}(\cos 4t + i\sin 4t)\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$

Realdel och imaginärdel av denna komplexa lösning ger två linjärt oberoende lösningar till systemet.

Vi får $\mathbf{X}_1 = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^{t}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\cos 4t - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 4t\right\} = e^{t}\begin{pmatrix} 3\cos 4t - 4\sin 4t \\ 5\cos 4t \end{pmatrix}$

och $\mathbf{X}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^{t}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\sin 4t + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 4t\right\} = e^{t}\begin{pmatrix} 3\sin 4t + 4\cos 4t \\ 5\sin 4t \end{pmatrix}.$

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 3\cos 4t - 4\sin 4t \\ 5\cos 4t \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} 3\sin 4t + 4\cos 4t \\ 5\sin 4t \end{pmatrix}.$

Begynnelsevillkoret ger $\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{X}(0) = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Den sökta lösningen är $\mathbf{X} = e^{t}\begin{pmatrix} 3\cos 4t - 4\sin 4t \\ 5\cos 4t \end{pmatrix} + 2e^{t}\begin{pmatrix} 3\sin 4t + 4\cos 4t \\ 5\sin 4t \end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix} 11\cos 4t - 2\sin 4t \\ 5\cos 4t + 10\sin 4t \end{pmatrix}.$

Partikeln beskriver en utåtgående spiral och avlägsnar sig obegränsat.

SVAR: Den sökta lösningen är $\mathbf{X} = e^{t}\begin{pmatrix} 11\cos 4t - 2\sin 4t \\ 5\cos 4t + 10\sin 4t \end{pmatrix}$ och partikeln avlägsnar sig obegränsat.

7. Låt p och q vara kontinuerliga på intervallet (a,b).
Låt x_0 vara en godtycklig punkt på intervallet (a,b).
Låt vidare y_1 och y_2 vara lösningar till differentialekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ på intervallet (a,b).

Visa Abels formel $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$, där $W(x)$ är Wronskianen till lösningarna y_1 och y_2.

Lösning:

y_1 och y_2 uppfyller differentialekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, vilket innebär att vi får följande system: $\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases}$.

Wronskianen av y_1 och y_2 ges av $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'.$

Vi omformar systemet så att Wronskianen uppkommer i detta system.
Multiplicera den första ekvationen med y_2 och den andra ekvationen med y_1 samt bilda differensen av mellan de nya ekvationerna.

$\begin{cases} (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)y_2 = 0 \\ (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)y_1 = 0 \end{cases}$ $\quad -y_1''y_2 + y_2''y_1 + p(x)(-y_1'y_2 + y_2'y_1) = 0$,

$\frac{d}{dx}\{y_2'y_1 - y_1'y_2\} + p(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0$, $\frac{d}{dx}W(x) + p(x)W(x) = 0.$

Vi har erhållit en differentialekvation i Wronskianen $W(x)$.

Differentialekvationen är separabel $\frac{1}{W(x)}\frac{dW(x)}{dx} = -p(x)$.

Integrera från x_0 till x: $\int_{x_0}^{x}\frac{1}{W(x)}\frac{dW(x)}{dx}dx = \int_{x_0}^{x} -p(x)dx$, $\ln|W(x)| = C_1 + \int_{x_0}^{x} -p(x)dx$

$W(x) = \pm e^{C_1}e^{\int_{x_0}^{x} -p(x)dx} = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$, För x lika med x_0 är $W(x)$ lika med $W(x_0)$ vilket ger $C = W(x_0)$.

Vi har fått $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$. VSV.

SVAR: Se ovan.

8. Beräkna kurvintegralen $\int_C \frac{ydx + (2-x)dy}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$, där C är en cirkel tagen i positiv riktning med origo som centrum och med radie lika med a) 1 b) 3.

<u>Lösning</u>:

Vi undersöker om vektorfältet är konservativt.

Först bestämmer vi

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{(2-x)}{x^2+y^2-4x+4} = \frac{(-1)(x^2+y^2-4x+4)-(2-x)(2x-4)}{(x^2+y^2-4x+4)^2} = \frac{x^2-y^2-4x+4}{(x^2+y^2-4x+4)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2-4x+4} = \frac{1(x^2+y^2-4x+4)-y2y}{(x^2+y^2-4x+4)^2} = \frac{x^2-y^2-4x+4}{(x^2+y^2-4x+4)^2}$$

De två blandade derivatorna är lika. Det återstår då huruvida det finns singulära punkter i ett enkelt sammanhängande område innehållande C.

Omformning av nämnaren i vektorfältet ger $x^2 + y^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 + y^2$.

(2,0) är en singulär punkt.

I fallet a) saknas singulära punkter och linjeintegralen längs en sluten kurva är lika med noll.

I fallet b) finns en singulär punkt, (2,0), och vektorfältet är ej konservativt i ett enkelt sammanhängande område som innehåller C.

Vi väljer ett nytt område som inte innehåller den singulära punkten.

Skär bort den singulära punkten med en cirkel med centrum i (2,0) och med radien lika med ε , kalla den nya kurvan för C_ε. Vi kan nu byta väg.

Parameterframställ kurvan C_ε : $\begin{cases} x-2 = \varepsilon\cos t \\ y = \varepsilon\sin t \end{cases}$ $\begin{cases} dx = -\varepsilon\sin t dt \\ dy = \varepsilon\cos t dt \end{cases}$ $t: 0 \to 2\pi$.

$$\int_C \frac{ydx+(2-x)dy}{x^2+y^2-4x+4} = \int_{C_\varepsilon} \frac{ydx+(2-x)dy}{x^2+y^2-4x+4} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{\varepsilon\sin t(-\varepsilon\sin t)+(-\varepsilon\cos t)\varepsilon\cos t}{(\varepsilon\cos t)^2+(\varepsilon\sin t)^2}dt = \int_{t=0}^{2\pi} -dt = -2\pi$$

SVAR: a) $\int_C \frac{ydx+(2-x)dy}{x^2+y^2-4x+4} = 0$ b) $\int_C \frac{ydx+(2-x)dy}{x^2+y^2-4x+4} = -2\pi$.

9. Låt $f(t)$ vara 2π -periodisk, d v s $f(t+2\pi) = f(t)$ för alla t, och låt

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi + t}{\pi} \; , & -\pi \le t \le 0 \\ \frac{\pi - t}{\pi} \; , & 0 \le t \le \pi \end{cases}.$$

a. Ange, t ex med hjälp av handboken β , fourierserieutvecklingen av f .

b. Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + y = f(t)$.

Lösningen får anges på serieform.

<u>Lösning</u>:

a. Enligt BETA under "Special Fourier series" avsnitt 13:1 återfinns utvecklingen till vår givna funktion.

Utvecklingen har formen $\frac{h}{2} + \frac{4h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{L}$ där $h = 1$ och $L = \pi$.

Vår funktion $f(t)$ tilldelas serien $\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t$.

b. Vi ansätter en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + y = f(t)$.

Vi försöker med en lösning på formen $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)t$.

Insättning i differentialekvationen ger

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n(2n-1)^2 \cos(2n-1)t+\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)t=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t \ .$$

Identifiering ger: $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$ och $-a_n(2n-1)^2+a_n=\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $a_n=\frac{-4}{\pi^2(2n-1)^2(1-(2n-1)^2)}$.

Observera att här måste n vara skild ifrån ett.
För fallet n lika med ett göres ansatsen $y_{p_1}=at\cos t+bt\sin t$

Insättning i differentialekvationen $y''+y=\frac{4}{\pi^2}\cos t$ ger

$$-2a\sin t+2b\cos t-t(a\cos t+b\sin t)+at\cos t+bt\sin t=\frac{4}{\pi^2}\cos t \ ,$$

$-2a\sin t+2b\cos t=\frac{4}{\pi^2}\cos t$, vilket ger $a=0$, $b=\frac{2}{\pi^2}$ dvs $y_{p_1}=\frac{2}{\pi^2}t\sin t$.

SVAR: a. Vår funktion $f(t)$ tilldelas serien $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t$.

b. Lösningen är $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}t\sin t-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(1-(2n-1)^2)}\cos(2n-1)t$.