

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210(5B1230).

Tisdagen den 23 augusti 2005, kl 0800-1300.

Hjälpmiddel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Fordringar: 3: 16-23p; 4: 24-30p; 5: 31p-.

Uppgifterna: 1, 3-4 och 6 ger 4p; 2, 5 och 7 ger 3p; 8-9 ger 5p.

Bonuspoäng räknas från period 1 2004 eller period 4 2005.

xx

1. En 500 liters tank innehåller ursprungligen 10 gram salt löst i 200 liter vatten. En saltlösning med koncentrationen 0.25 gram per liter pumpas in i tanken med en hastighet av 4 liter per minut. Den välblandade lösningen pumpas ut med en hastighet av 2 liter per minut. När är tanken full? Ställ upp en differentialekvation för mängden av salt $Q(t)$. Bestäm koncentrationen $K(t)$ gram per liter i tanken vid en godtycklig tidpunkt t .

2. Bestäm de stationära lösningarna till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3)$ samt avgör om de är stabila eller instabila.

3. Bestäm jämviktspunkterna till systemet
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2xy \\ \dot{y}(t) &= -x + 3y + 1 \end{aligned}$$
 och deras art (sadel/nod/spiral, stabil/instabil).

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'(t) + y(t) = f(t)$, $y(0) = 2$, $y(\pi) = -1$, $t \in [0, \pi]$, där

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Beräkna även $y(\frac{3\pi}{2})$.

5. Beräkna volymen av det område som begränsas av paraboloiderna $z = 8 - x^2 - y^2$ och $z = x^2 + y^2$.

6. En partikels läge ges av systemet $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}$, där \mathbf{X} anger partikelns

läge i planet. Vidare gäller att partikeln befinner sig i punkten $(\frac{11}{5}, 0)$ vid tiden $t = 0$. Bestäm partikelns läge vid en godtycklig tidpunkt t samt avgör vad som händer med partikeln efter lång tid.

7. Låt p och q vara kontinuerliga på intervallet (a, b) .

Låt x_0 vara en godtycklig punkt på intervallet (a, b) .

Låt vidare y_1 och y_2 vara lösningar till differentialekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ på intervallet (a, b) .

Visa Abels formel $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx}$, där $W(x)$ är Wronskianen till lösningarna y_1 och y_2 .

8. Beräkna kurvintegralen $\int_C \frac{ydx + (2-x)dy}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$, där C är en cirkel tagen i positiv riktning med origo som centrum och med radie lika med a) 1 b) 3.

9. Låt $f(t)$ vara 2π -periodisk, d v s $f(t + 2\pi) = f(t)$ för alla t , och låt

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi + t}{\pi}, & -\pi < t < 0 \\ \frac{\pi - t}{\pi}, & 0 < t < \pi \end{cases}.$$

a. Ange, t ex med hjälp av handboken β , fourierserieutvecklingen av f .

b. Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + y = f(t)$.

Lösningen får anges på serieform.