KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.
Måndagen den 31 oktober 2005, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.
För godkänt krävs att 5 moduler är godkända..
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelning på del 2: 11-14 ger 5 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng på del 2.
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2005. OBS!

Del 1

Modul 1.

En 200 l´s tank innehåller 40 l rent vatten. En saltlösning med 1/4 kg salt per liter pumpas in med 16 l/min. Den väl blandade lösningen pumpas ut med 8 l/min. När är tanken full ?
Bestäm även saltmängden i tanken vid detta tillfälle.

Lösning:

Tanken är full då $200 = 40 + t(16 - 8)$, dvs efter 20 minuter.
Låt saltmängden i tanken vid tiden t vara $A(t)$.

Saltmängden uppfyller differentialekvationen $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{4}\cdot 16 - \dfrac{A}{40 + (16 - 8)t}\cdot 8$.

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{5+t} = 4$$

Vi har en linjär differentialekvation av första ordningen.
Multiplicera med en integrerande faktor.

$$(5+t)\frac{dA}{dt} + A = 4(5+t) \quad , \quad \frac{d}{dt}\{(5+t)A\} = 4(5+t)$$

Integrera med avseende på t: $(5+t)A = 2(5+t)^2 + C$.
Vid $t = 0$ är $A = 0$. Detta ger $C = -50$.

Saltmängden vid en godtycklig tidpunkt t är $A(t) = 2(5+t) - \dfrac{50}{5+t}$.

Då tanken är full är saltmängden i tanken $A(20) = 50 - \dfrac{50}{25} = 48$ kg.

SVAR: Tanken är full efter 20 minuter och då är saltmängden 48 kg.

Modul 2.

Differentialekvationen $t^2 y'' + ty' - y = 0$, $t > 0$ satisfieras av funktionen $y_1 = t^{-1}$.
Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $t^2 y'' + ty' - y = t^2$, $t > 0$.

Lösning:

Vi ansätter $y = z \cdot t^{-1}$ och sätter in i den inhomogena differentialekvationen.

$$t^2\left\{z'' t^{-1} - z' t^{-2} - z' t^{-2} + 2z\cdot t^{-3}\right\} + t\left\{z' t^{-1} - z\cdot t^{-2}\right\} - z\cdot t^{-1} = t^2$$

Förenkling ger: $tz'' - z' = t^2$.
Vi reducerar ordningen genom att sätta $u = z'$, $u' = z''$.
Vi får: $tu' - u = t^2$.

Omformning ger : $t^{-1}u' - t^{-2}u = 1$, $\dfrac{d}{dt}(t^{-1}u) = 1$.

Integrera med avseende på t: $t^{-1}u = t + A$, $z' = u = t^2 + At$.

Integrera med avseende på t: $z = \dfrac{t^3}{3} + A\dfrac{t^2}{2} + B = \dfrac{t^3}{3} + Ct^2 + B$.

Insättning i ansatsen ger :

$$y = \frac{t^2}{3} + Ct + Bt^{-1}$$

SVAR: Den sökta lösningen är

$$y = \frac{t^2}{3} + Ct + Bt^{-1}.$$

Modul 3.

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 9y = 9tU(t-4)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 3$.

Lösning:

Laplacetransformera : $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 9Y(s) = 9L\{(t-4+4)U(t-4)\}$

Insättning av villkoren och transformation av högerledet ger:

$$s^2Y(s) - 3 + 9Y(s) = 9\left(\frac{1}{s^2} + \frac{4}{s}\right)e^{-4s}$$

Lös ut den obekanta funktionens Laplacetransform

$$Y(s) = \frac{3}{s^2+9} + \left(\frac{9}{s^2(s^2+9)} + \frac{9\cdot 4}{s(s^2+9)}\right)e^{-4s}$$

Partialbråksuppdelning ger:

$$Y(s) = \frac{3}{s^2+9} + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+9} + \frac{4}{s} - \frac{4s}{s^2+9}\right)e^{-4s}$$

Återtransformering ger:

$$y(t) = \sin 3t + U(t-4)\left(t - 4 - \frac{1}{3}\sin 3(t-4) + 4 - 4\cos 3(t-4)\right)$$

SVAR: Den sökta lösningen är

$$y(t) = \sin 3t + U(t-4)\left(t - 4 - \frac{1}{3}\sin 3(t-4) + 4 - 4\cos 3(t-4)\right)$$

Modul 4.

Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen $u_x' + 3u_y' = u$ som uppfyller vilkoret $u(x,0) = 3e^{2x} + 4e^{-5x}$.

Lösning:

Vi använder variabelseparation och ansätter härvid $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Insättning i differentialekvationen ger: $X'(x)Y(y) + 3X(x)Y'(y) = X(x)Y(y)$.

Dividera med $3X(x)Y(y)$: $\dfrac{X'(x)}{3X(x)} + \dfrac{Y'(y)}{Y(y)} = \dfrac{1}{3}$.

Omformning ger: $\dfrac{X'(x)}{3X(x)} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda$.

Detta ger oss följande system av differentialekvationer: $\begin{cases} X'(x) - 3\lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)Y(y) = 0 \end{cases}$

Differentialekvationerna är linjära med konstanta koefficienter och de har följande lösningar:

$$\begin{cases} X(x) = Ae^{3\lambda x} \\ Y(y) = Be^{\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)y} \end{cases}$$

Insättning i ansatsen ger: $u(x,y) = Ae^{3\lambda x}Be^{\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)y} = Ce^{3\lambda x + \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)y}$ för varje val av konstanterna .

Även linjärkombinationer av lösningar är lösning. $u(x,y) = \sum_i C_i e^{3\lambda_i x + \left(\frac{1}{3}-\lambda_i\right)y}$

Det givna villkoret ger $u(x,0) = 3e^{2x} + 4e^{-5x} = \sum_i C_i e^{3\lambda_i x}$.

Identifiering ger: $\begin{cases} C_1 = 3,\ \lambda_1 = \dfrac{2}{3}\ ,\ \ C_2 = 4,\ \lambda_2 = -\dfrac{5}{3} \\ \text{Övriga } C_i = 0 \end{cases}$

Den sökta lösningen är $u(x,y) = 3e^{2x-\frac{1}{3}y} + 4e^{-5x+2y}$.

SVAR: $u(x,y) = 3e^{2x-\frac{1}{3}y} + 4e^{-5x+2y}$

Modul 5.

Beräkna volymen av den kropp som begränsas av paraboloiderna $z = x^2 + y^2$ och $z = 18 - x^2 - y^2$.

Lösning:

Volymen ges av trippelintegralen $V = \iiint\limits_K dxdydz$.

Randkurva till det aktuella området i xy-planet erhålles ur ekvationen $z = x^2 + y^2 = 18 - x^2 - y^2$

Vi får $x^2 + y^2 = 9$, en cirkel med radien lika med tre.

Integrera först med avseende på z.

$$V = \iiint\limits_K dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\int_{z=x^2+y^2}^{18-x^2-y^2} 2zdz \right) dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left\{ 18 - 2x^2 - 2y^2 \right\} dxdy$$

Inför polära koordinater $V = \iint\limits_{D_{r\theta}} \left\{ 9\cdot 2 - 2r^2 \right\} rdrd\theta = 2\pi \int_{r=0}^{3} (9\cdot 2r - 2r^3)dr = \pi\left(18\cdot 3^2 - 3^4\right) = 81\pi$.

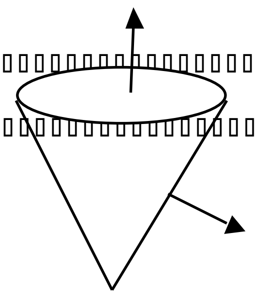
SVAR: Volymen $V = 81\pi$.

Modul 6.

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{u} = \left(e^y,\ e^x,\ z^2\right)$ ut ur den kropp som begränsas av ytorna $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 4$ och $x^2 + y^2 \le z^2$, $z = 4$

Lösning:

Flödet ut ur kroppen ges av $\Phi = \iint\limits_S \mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma$, där $\hat{\mathbf{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen och S är kroppens totala begränsningsyta. Vi använder divergenssatsen. $\Phi = \iint\limits_S \mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iiint\limits_K div\mathbf{u}dxdydz$.



$$div\mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(e^y,\ e^x,\ z^2\right) = 2z$$

Integrera först med avseende på z.

$$\Phi = \iiint\limits_K 2zdxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{4} 2zdz \right) dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left\{ 16 - x^2 - y^2 \right\} dxdy$$

Inför polära koordinater: $\Phi = \iint\limits_{D_{r\theta}} \left\{ 16 - r^2 \right\} rdrd\theta = 2\pi \int_{r=0}^{4} (16r - r^3)dr = \pi\left(16\cdot 4^2 - \frac{1}{2}4^4\right) = 128\pi$.

SVAR: Utflödet är $\Phi = 128\pi$.

Anmärkning: $\Phi = \iiint\limits_K 2zdxdydz = \left[\iint\limits_{D_{xy}} 2zdxdy = 2z\cdot\pi(x^2+y^2) = 2z\cdot\pi z^2 \right] = \int_{z=0}^{4} 2z\cdot\pi z^2 dz = \pi\frac{4^4}{2} = 128\pi$

Del 2

11. a. För vilka startvärden $y(0)=y_0$ existerar gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} y(t)$ då $y'(t)=y(y-2)(y-3)$.

b. Bestäm en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx}+2xy = f(x),\ f(x)=\begin{cases} x\ , & 0\le x<1 \\ 0\ , & x\ge 1\end{cases}\ ,\ y(0)=2.$$

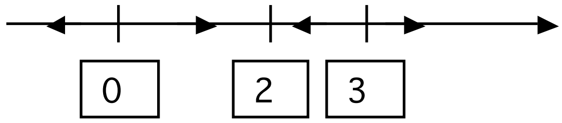
Lösning:

a.

Vi gör en kvalitativ analys av differentialekvationen och bestämmer först de stationära lösningarna. Dessa erhålles då derivatan är lika med noll. Vi får $y_1=0$, $y_2=2$ och $y_3=3$.

Vi fortsätter med att studera derivatans tecken i olika y-intervall.

$$\begin{cases} y>3 & \Rightarrow\ y'>0 \quad y \text{ växer} \\ 3>y>2 & \Rightarrow\ y'<0 \quad y \text{ avtar} \\ 2>y>0 & \Rightarrow\ y'>0 \quad y \text{ växer} \\ 0>y & \Rightarrow\ y'<0 \quad y \text{ avtar}\end{cases}$$



Gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} y(t)$ för startvärden i intervallet $0\le y_0\le 3$.

Observera att gränsvärdet för startvärdena $y_0=y_1=0$ och $y_0=y_3=3$ är noll respektive tre.

För startvärden i intervallet $0<y_0<3$ är gränsvärdet lika med 2.

b.

Den givna differentialekvationen är linjär av första ordningen.

Multiplicera ekvationen med en integrerande faktor. En sådan integrernde faktor är $e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$.

Vi erhåller då $e^{x^2}\dfrac{dy}{dx}+e^{x^2}2xy=\begin{cases} e^{x^2}x\ , & 0\le x<1 \\ 0 & ,\ x\ge 1\end{cases}$.

Vänstra ledet kan nu skrivas en derivata: $\dfrac{d}{dx}\left\{e^{x^2}y\right\}=\begin{cases} e^{x^2}x\ , & 0\le x<1 \\ 0 & ,\ x\ge 1\end{cases}$.

Integrera med avseende på x: $e^{x^2}y=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{x^2}+C_1\ , & 0\le x<1 \\ C_2 & ,\ x\ge 1\end{cases}$.

Utnyttja först det givna begynnelsevillkoret $y(0)=2$. Detta ger $2=\dfrac{1}{2}+C_1$, $C_1=\dfrac{3}{2}$.

Insatt ovan ger $y=\begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-x^2} & ,\ 0\le x<1 \\ C_2e^{-x^2} & ,\ x\ge 1\end{cases}$. Det återstår att bestämma den andra konsten. Den sökta lösningen skall vara kontinuerlig. Då skall höger- och vänstergränsvärdet för lösningen i $x=1$ vara lika.

Detta ger oss $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-1}=C_2e^{-1}$, $C_2=\dfrac{e+3}{2}$.

SVAR: a. Gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} y(t)$ för startvärden i intervallet $0\le y_0\le 3$.

b. En kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet är $y=\begin{cases} \dfrac{1+3e^{-x^2}}{2}\ , & 0\le x<1 \\ \dfrac{e+3}{2}e^{-x^2}, & x\ge 1\end{cases}$.

12. Studera det icke-linjära systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x^2 + \dfrac{3}{2})y \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + 4y - 1 \end{cases}$ genom att hitta alla kritiska punkter, bestämma deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.

Lösning.

I kritiska punkter är tangentvektorn lika med nollvektorn. Vi får $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} (x^2 + \frac{3}{2})y \\ x^2 + 4y - 1 \end{pmatrix}$.

De kritiska punkterna är: $(1,0)$ och $(-1,0)$.

Nu över till bestämning av de stationära punkternas karaktär. Vi linjariserar det icke-linjära systemet. Först beräknas Jacobimatrisen och därefter insättes respektive stationär punkt.

Jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + \frac{3}{2} \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$.

Insättning av $(1,0)$ ger $\mathbf{J}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$.

Vi bestämmer matrisens egenvärden. $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{5}{2} \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$.

Egenvärdena är reella och med olika tecken. Det linjariserade systemet uppvisar en sadelpunkt i $(1,0)$. Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

Insättning av $(-1,0)$ ger $\mathbf{J}(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$.

Vi bestämmer matrisens egenvärden. $0 = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{5}{2} \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1$.

Egenvärdena är komplexa och med positiv realdel.
Det linjariserade systemet uppvisar en instabil spiral i $(-1,0)$.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.
SVAR: De kritiska punkterna är $(1,0)$ och $(-1,0)$.
$(1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil. $(-1,0)$ är en instabil spiralpunkt.

13. Låt $F(x,y,z) = f(r)$ där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Bestäm alla funktioner $f(r)$ för vilka gäller $div(gradF) = 1$ då $r > 0$.

Lösning:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ger $r_x' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \dfrac{x}{r}$, $r_y' = \dfrac{y}{r}$ och $r_z' = \dfrac{z}{r}$.

$$gradF = (f' r_x', f' r_y', f' r_z') = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$div(gradF) = div(f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(f'(r)\frac{x}{r}) + \frac{\partial}{\partial y}(f'(r)\frac{y}{r}) + \frac{\partial}{\partial z}(f'(r)\frac{z}{r})$$

$$div(gradF) = f''(r)\frac{x}{r}\frac{x}{r} + f'(r)\left(\frac{1}{r} + x\frac{-1}{r^2}\frac{x}{r}\right) + cykl.$$

$$div(gradF) = f''(r) + f'(r)\left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r}\right) = f''(r) + f'(r)\frac{2}{r} = 1$$

Vi har erhållit en linjär differentialekvation av ordning två där ordningen kan reducera genom substitutionen $z = f'$, $z' = f''$.

Vi får då $z' + z\dfrac{2}{r} = 1$. Multiplicera med en integrerande faktor, r^2.

$r^2 z' + z2r = r^2$, $(r^2 z)' = r^2$.

Integrera med avseende på r: $r^2 z = \dfrac{r^3}{3} + A$, $f' = z = \dfrac{r}{3} + Ar^{-2}$.

Integrera med avseende på r: $f = \dfrac{r^2}{6} - Ar^{-1} + B = \dfrac{r^2}{6} + \dfrac{C}{r} + B$, där C och B är godtyckliga konstanter.

SVAR: De sökta funktionerna är $f(r) = \dfrac{r^2}{6} + \dfrac{C}{r} + B$, $r > 0$.

14.

a) Visa att $\{\sin nx\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet $[0, \pi]$.

b) Skriv funktionen $f(x) = \sin^3 x$ på intervallet $[0, \pi]$ som en linjärkombination av lämpliga ortogonala funktioner ovan.

c) Antag att funktionen $f(x) = x^4 + 1$, $0 < x < 2$ är utvecklad i följande tre serier: en Fourierserie, en cosinusserie och en sinusserie. Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar mot för $x = 0$.

Lösning:

a) Vi visar att den inre produkten mellan två godtyckliga funktioner i den givna mängden är lika med noll på det givna intervallet.

$$\langle \sin nx, \sin mx \rangle = \int_0^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(nx - mx) - \cos(nx + mx))dx = \{n \neq m\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]_0^{\pi} = 0 \ .$$

b) Här gäller det att beskriva $f(x) = \sin^3 x$ med hjälp av den givna funktionsföljden.

En väg att göra detta är att ansätta $\sin^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, multiplicera med $\sin mx$ och integrera över intervallet $[0, \pi]$.

En betydligt kortare väg är att utnyttja formeln $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Den sökta linjärkombinationen blir: $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$.

c) Respektive serie kommer att konvergera mot $\dfrac{f(0+) + f(0-)}{2}$.

I fallet med Fourierserien blir detta: $\dfrac{0^4 + 1 + 2^4 + 1}{2} = 9$.

I fallet med cosinusserien blir detta: $\dfrac{0^4 + 1 + 0^4 + 1}{2} = 1$.

I fallet med sinusserien blir detta: $\dfrac{0^4 + 1 - (0^4 + 1)}{2} = 0$.

SVAR: a) Se ovan. b) $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$. c) 9 , 1 respektive 0.