KTH Matematik

Kompletteringstentamen i Matematik IV, 5B1210.
Fredagen den 11 november 2005, kl 1200-1500.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Denna tentamen är avsedd för komplettering till betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.
För godkänt krävs att 5 moduler är godkända..

OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2005. OBS!
Denna tentamen är endast avsedd för de som uppnått tre eller fyra godkända moduler.
Endast icke godkända moduler behandlas.

Modul 1.

Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen

$y' = \dfrac{y}{a}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right)$, $y > 0$, där $a = 3$ [år] och $b = 60$ [ton].

Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).

a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.

b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas om det skall finnas någon stationär lösning > 0, med andra ord finnas någon fisk kvar.

Lösning:

a. Den korrigerade differentialekvationen blir $y' = \dfrac{y}{a}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) - c$.

Med de givna värdena på konstanterna får vi

$$y' = \frac{y}{3}\left(1 - \frac{y}{60}\right) - c = \frac{y(60-y)}{180} - c = \frac{y(60-y) - 180c}{180} = f(y) .$$

b. Jämviktslösning(stationär lösning) erhålles då $f(y) = 0$.

Då är $y^2 - 60y + 180c = 0$, $(y-30)^2 = 900 - 180c = 180(5-c)$.

Reella lösningar och större än noll erhålles då $c \le 5$.

För $c > 5$ existerar inga jämviktslösningar.

Jämviktslösningarna är $y = 30 \pm \sqrt{180(5-c)}$.

SVAR:

a. Den nya differentialekvationen är $y' = \dfrac{y(60-y)}{180} - c$.

b. Det kritiska värde på c är $c = 5$.

Modul 2.

Bestäm den allmänna lösningen till följande system av differentialekvationer

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 36e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösning:

Den allmänna lösningen erhålles som summan av den allmänna homogena lösningen plus en partikulärlösning.
Vi börjar med att bestämma den allmänna homogena lösningen.

Den erhålles genom att bestämma egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Först till egenvärdena: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 9 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9$, $\lambda_{1,2} = \pm 3$.

Nu över till bestämning av tilllhörande egenvektorer.

$\lambda = 3$ insatt i systemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$. En lösning är $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = -3$ insatt i systemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$. En lösning är $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Den allmänna homogena lösningen ges av $\mathbf{X}_h = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & 3e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

En partikulär lösning fås genom variation av parametrar och är $\mathbf{X}_p = \Phi\int \Phi^{-1}\mathbf{F}\,dt$, där $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 36e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

En fundamentalmatris $\Phi = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & 3e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}$ och dess invers är

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -e^{-3t} & -3e^{-3t} \\ -e^{3t} & 3e^{3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{-3t} & 3e^{-3t} \\ e^{3t} & -3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

$$\Phi^{-1}\mathbf{F} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{-3t} & 3e^{-3t} \\ e^{3t} & -3e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 36e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & 3e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\int\begin{pmatrix} 6 \\ 6e^{6t} \end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & 3e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6t \\ e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18te^{3t} + 3e^{3t} \\ 6te^{3t} - e^{3t} \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & 3e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18te^{3t} + 3e^{3t} \\ 6te^{3t} - e^{3t} \end{pmatrix}$.

SVAR: Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & 3e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} 18t + 3 \\ 6t - 1 \end{pmatrix}$.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm lösningen till ekvationen

$$y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\sin 3(t-\tau)\,d\tau = t$$
.

<u>Lösning:</u>

Laplacetransformera : $Y(s) + 9Y(s)\dfrac{3}{s^2+9} = \dfrac{1}{s^2}$

$$Y(s)\frac{s^2+36}{s^2+9} = \frac{1}{s^2}$$

Lös ut $Y(s)$ och partialbråksuppdela.

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}\frac{s^2+9}{s^2+36} = \frac{1/4}{s^2} + \frac{3/4}{s^2+36}$$

Anpassa till formelverket.

$$Y(s) = \frac{1/4}{s^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{s^2+36}$$

Återtransformera.

$$y(t) = \frac{t}{4} + \frac{1}{8}\cdot\sin 6t$$

SVAR: Den sökta lösningen är $y(t) = \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{8}\cdot\sin 6t$.

Modul 4.

Bestäm Fourierutvecklingen till funktionen given av $f(t) = \begin{cases} \cos t & , \quad 0 < t < \pi \\ -\cos t & , \quad -\pi < t < 0 \end{cases}$.

Lösning:

Funktionen är udda och dess Fourierutveckling är på formen $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$.

Fourierkoefficienterna beräknas enligt $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{t=0}^{\pi} \cos t \cdot \sin nt \; dt = \frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{\pi} \{\sin(n-1)t + \sin(n+1)t\} dt$.

$$b_n = \{n \neq 1\} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n-1)t}{n-1} - \frac{\cos(n+1)t}{n+1} \right]_{t=0}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n-1)\pi}{n-1} + \frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} \right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n-1)\pi}{n-1} + \frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} \right) = \frac{1-\cos(n+1)\pi}{\pi}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$b_n = \frac{1+\cos n\pi}{\pi}\,\frac{2n}{n^2-1} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2m+1 \\ \dfrac{8m}{\pi(4m^2-1)} & , \quad n = 2m \end{cases} \qquad b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{\pi} \sin 2t dt = 0$$

Den sökta utvecklingen är $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{8m}{\pi(4m^2-1)} \sin 2mt$.

SVAR: $f(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8m}{\pi(4m^2-1)} \sin 2mt$

Anmärkning: Den observante kan hitta utvecklingen i BETA 13.1. nr11.

Modul 5.

Beräkna dubbelintegralen $\iint_{D_{xy}} \frac{2y-x}{4+y-2x} dxdy$,

där D_{xy} är det parallellogram med hörn i punkterna (0,0) , (2,1) , (3,3) och (1,2).

Lösning:

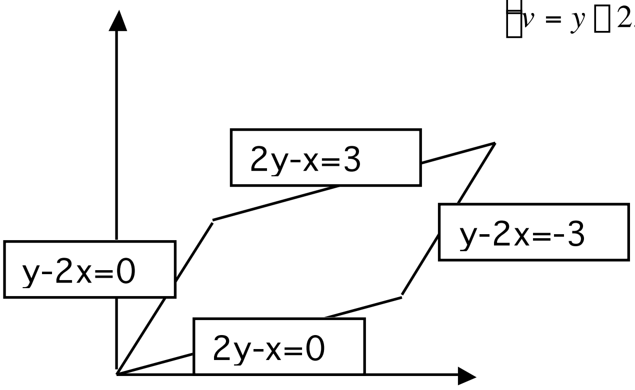
Vi börjar med att rita upp området.

De räta linjernas ekvationer uppskrives i figuren.

Vi inför nya variabler enligt följande:

$$\begin{cases} u = 2y - x \\ v = y - 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} u: \; 0 \to 3 \\ v: -3 \to 0 \end{cases}$$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det\left(\frac{d(u,v)}{d(x,y)} \right) = 3$$



$$\iint_{D_{xy}} \frac{2y-x}{4+y-2x} dxdy = \iint_{D_{uv}} \frac{u}{4+v} \cdot \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \ln 4 = \frac{3}{2}\ln 4 = 3\ln 2$$

SVAR: Dubbelintegralen $\iint_{D_{xy}} \frac{2y-x}{4+y-2x} dxdy = 3\ln 2$

<u>Modul 6</u>. Beräkna linjeintegralen $\int_C \frac{dx}{x^2 y} + \frac{dy}{xy^2}$,

där C är hyperbeln $x^2 - y^2 = 3$ från $(2,1)$ till $(3,\sqrt{6})$

<u>Lösning:</u>

Vi undersöker om kraftfältet $\mathbf{F} = \left(\frac{1}{x^2 y}, \frac{1}{xy^2}\right)$ har en potential.

Kraftfältet har två singulära kurvor. $x \equiv 0$ och $y \equiv 0$.

Vi betraktar ett enkelt sammanhängande område som inte innehåller de singulära kurvorna men som innehåller de givna punkterna.

Vi konstaterar att derivatorna $\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{x^2 y} = \frac{-1}{x^2 y^2}$ och $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{xy^2} = \frac{-1}{x^2 y^2}$ är lika.

Funktionerna och derivatorna är kontinuerliga i området.

Detta innebär att det finns en potential, $U(x,y)$, till kraftfältet.

Vi har att $\mathbf{F} = \left(\frac{1}{x^2 y}, \frac{1}{xy^2}\right) = grad U(x,y)$.

Detta ger oss systemet: $\begin{cases} U'_x = \frac{1}{x^2 y} \Rightarrow U(x,y) = -\frac{1}{xy} + f(y) \Rightarrow U'_y = \frac{1}{xy^2} + f'(y) \\ U'_y = \frac{1}{xy^2} \end{cases}$.

Identifiering ger $f'(y) = 0$.

En potential är $U(x,y) = -\frac{1}{xy} + C$.

Linjeintegralen kan beräknas med hjälp av potentialen.

$$\int_C \frac{dx}{x^2 y} + \frac{dy}{xy^2} = U(3,\sqrt{6}) - U(2,1) = \left(-\frac{1}{3\sqrt{6}} + C\right) - \left(-\frac{1}{2\cdot 1} + C\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{18}.$$

Alternativt kan vi byta väg i linjeintegralen och ersätta den givna kurvan med två räta linjer.

En rät linje från (2,1) till (3,1) och därifrån rätlinjigt till till punkten $(3,\sqrt{6})$.

Vi parameterframställer de bägge linjerna.

$$L_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases} \quad t : 2 \to 3$$

$$\int_{L_1} \frac{dx}{x^2 y} + \frac{dy}{xy^2} = \int_{t=2}^{3} \frac{dt}{t^2 1} = \frac{-1}{3} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$L_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases} \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases} \quad t : 1 \to \sqrt{6}$$

$$\int_{L_2} \frac{dx}{x^2 y} + \frac{dy}{xy^2} = \int_{t=1}^{\sqrt{6}} \frac{dt}{3t^2} = \frac{-1}{3\sqrt{6}} - \frac{-1}{3}$$

Linjeintegralen $\int_C \frac{dx}{x^2 y} + \frac{dy}{xy^2} = \int_{L_1} \frac{dx}{x^2 y} + \frac{dy}{xy^2} + \int_{L_2} \frac{dx}{x^2 y} + \frac{dy}{xy^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{18}$.

SVAR: Linjeintegralen $\int_C \frac{dx}{x^2 y} + \frac{dy}{xy^2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{18}$.