

**Kompletteringstentamen i Matematik IV, 5B1210.**

Fredagen den 11 november 2005, kl 1200-1500.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Denna tentamen är avsedd för komplettering till betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.

För godkänt krävs att 5 moduler är godkända..

OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2005. OBS!

Denna tentamen är endast avsedd för de som uppnått tre eller fyra godkända moduler.

Endast icke godkända moduler behandlas.

Modul 1.

Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk,  $y(t)$  [ton], i sjön med tiden  $t$  [år] enligt differentialekvationen

$$y' = \frac{y}{a} - \frac{y}{b}, \quad y > 0, \quad \text{där } a = 3 \text{ [år]} \text{ och } b = 60 \text{ [ton]}.$$

Nu börjar man fiska ut  $c$  [ton] fiskar per år, ( $c$  är en positiv konstant).

a. Ange differentialekvationen för  $y$  som då gäller.

b. Ange det kritiska värde på  $c$  som inte får överskridas om det skall finnas någon stationär lösning  $> 0$ , med andra ord finnas någon fisk kvar.

Modul 2.

Bestäm den allmänna lösningen till följande system av differentialekvationer

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Modul 3.

Bestäm lösningen till ekvationen

$$y(t) + 9 \int_0^t y(\tau) \sin 3(t - \tau) d\tau = t$$

Modul 4.

Bestäm Fourierutvecklingen till funktionen given av  $f(t) = \begin{cases} \cos t & , 0 < t < \pi \\ \cos t & , \pi < t < 2\pi \end{cases}$ .

Modul 5.

Beräkna dubbelintegralen  $\iint_{D_{xy}} \frac{2y - x}{4 + y - 2x} dx dy$ ,

där  $D_{xy}$  är det parallelogram med hörn i punkterna  $(0,0)$ ,  $(2,1)$ ,  $(3,3)$  och  $(1,2)$ .

Modul 6. Beräkna linjeintegralen  $\int_C \frac{dx}{x^2 y} + \frac{dy}{xy^2}$ ,

där  $C$  är hyperbeln  $x^2 - y^2 = 3$  från  $(2,1)$  till  $(3, \sqrt{6})$ .