Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.

Lördagen den 14 januari 2006, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Fordringar: 3: 15-22p; 4: 23-31p; 5: 30-35p.

OBS ! Inga bonuspoäng finns ej. OBS !

Uppgifterna: 1-4, 8 ger 3 poäng vardera, 5 och 7 ger 4 poäng vardera, 9 ger 2 poäng samt 6 och 10 ger 5 poäng vardera.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (2x+3y)\,dxdy$$

där D är det ändliga område som begränsas av linjerna $x+y=2,\ y=x$ och $y=0$.

Lösning:

Integrera först med avseende på x.

$$\iint_D (2x+3y)\,dxdy = \int_{y=0}^{1} \left\{ \int_{x=y}^{2-y} (2x+3y)\,dx \right\} dy = \int_{y=0}^{1} \left\{ (2-y)^2 - y^2 + 3y((2-y)-y) \right\} dy \cdot$$

$$\iint_D (2x+3y)\,dxdy = \int_{y=0}^{1} \left\{ 4+2y-6y^2 \right\} dy = 4+1-2=3 \cdot$$

SVAR: Dubbelintegralen $\iint_D (2x+3y)\,dxdy = 3$

2. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till den autonoma differentialekvationen $y' = y(2-y)(4-y)$.

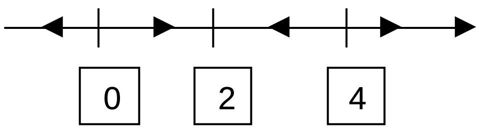
Lösning:

Vi börjar med att bestämma stationära lösningar. Då gäller att $y'=0$.

Vi erhåller: $y_1=0$, $y_2=2$ och $y_3=4$.

Teckenstudie av derivatan ger:
$$\begin{cases} y'<0 \text{ då } y<0 & y \text{ avtagande då } y<0. \\ y'>0 \text{ då } 0<y<2 & y \text{ växande då } y<0. \\ y'<0 \text{ då } 2<y<4 & y \text{ avtagande då } y<0. \\ y'>0 \text{ då } 4<y & y \text{ växande då } y<0. \end{cases}$$

Vi ritar det endimensionella fasporträttet.



$y_1=0$ är en instabil kritisk punkt.

$y_2=2$ är en stabil kritisk punkt.

$y_3=4$ är en instabil kritisk punkt.

SVAR: $y_1=0$ och $y_3=4$ är instabila kritiska punkter och $y_2=2$ är en stabil kritisk punkt.

3. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2x+y \end{pmatrix}$.

Lösning:

Vi skriver om systemet på matrisform och bestämmer matrisens egenvärden och egenvektorer.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrisen $\mathbf{A}$:s egenvärden erhålles ur ekvationen $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$.

Vi får $0=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)$. Egenvärdena är $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=4$.

Motsvarande egenvektorer $\mathbf{K}$ erhålles ur $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{K}=0$.

För $\lambda_1=-1$ får vi $\begin{pmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$.

En egenvektor är $\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En lösning till systemet är $\mathbf{X}_1=e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$.

För $\lambda_2=4$ får vi $\begin{pmatrix} 2-4 & 3 \\ 2 & 1-4 \end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$.

En egenvektor är $\mathbf{K}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. En lösning till systemet är $\mathbf{X}_2=e^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen ges av en godtycklig linjärkombination av de två erhållna lösningarna.

Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2=c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''+2y'+5y=\delta(t-\frac{\pi}{2})$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0)=1$, $y'(0)=0$, där $\delta(t-\frac{\pi}{2})$ är Diracs deltafunktion.

Lösning:

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2(sY(s)-y(0))+5Y(s)=e^{-s\frac{\pi}{2}}$

$Y(s)(s^2+2s+5)=e^{-s\frac{\pi}{2}}+s+2$ $\qquad Y(s)=\dfrac{s+2}{s^2+2s+5}+\dfrac{e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s^2+2s+5}$

$$Y(s)=\frac{s+1+\frac{1}{2}2}{(s+1)^2+4}+\frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}e^{-s\frac{\pi}{2}}$$

Återtransformera

$$y(t)=e^{-t}(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)+\frac{1}{2}U(t-\frac{\pi}{2})e^{-(t-\frac{\pi}{2})}\sin 2(t-\frac{\pi}{2}).$$

SVAR: Differentialekvationens lösning är

$$y(t)=e^{-t}(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)+\frac{1}{2}U(t-\frac{\pi}{2})e^{-(t-\frac{\pi}{2})}\sin 2(t-\frac{\pi}{2})$$

5. Två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2y''+axy'+by=0$ ges av $y_1=x$ och $y_2=x^2$.

Vidare har motsvarande inhomogena differentialekvation en partikulärlösning $y_p=x\ln x$.

Bestäm den inhomogena differentialekvationen.

Lösning:

Insättning av lösningarna i differentialekvationen ger följande system: $\begin{cases} y_1 = x & x^2 0 + ax1 + bx = 0 \\ y_2 = x^2 & x^2 2 + ax2x + bx^2 = 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2 + 2a + b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 2 \\ a = -2 \end{cases}$.

Den homogena differentialekvationen är $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$.

En partikulärlösning är $y_p = x\ln x$ vilket insatt i vänstra ledet ovan ger den inhomogena differentialekvationens högerled.

Vi får $x^2 \dfrac{1}{x} - 2x(\ln x + x\dfrac{1}{x}) + 2x\ln x = -x$.

Vår sökta differentialekvation är $x^2 y'' - 2xy' + 2y = -x$.

SVAR: Den sökta differentialekvationen är $x^2 y'' - 2xy' + 2y = -x$.

6. En partikels läge bestäms av systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Bestäm eventuella stationära punkter.

Klassificera med avseende på stabilitet och typ. Bestäm systemets allmänna lösning.

Vart tar partikeln vägen då t växer obegränsat om partikelns läge uppfyller $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

<u>Lösning:</u>

Den finns endast en stationär punkt, origo, ty matrisens determinant är skild ifrån noll.

Vi bestämmer först egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2\ , \quad (\lambda + 1)^2 + 1 = 0\ , \ \lambda = -1 \pm \boldsymbol{i}.$$

Komplexa egenvärden med negativ realdel innebär att det är en stabil spiralpunkt.

Bestäm en egenvektor till egenvärdet $\lambda = -1 + \boldsymbol{i}$.

$$0 = \begin{pmatrix} 1-(-1+\boldsymbol{i}) & -1 \\ 5 & -3-(-1+\boldsymbol{i}) \end{pmatrix}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2-\boldsymbol{i} & -1 \\ 5 & -2-\boldsymbol{i} \end{pmatrix}\mathbf{K}\ , \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\boldsymbol{i} \end{pmatrix}.$$

En komplex lösning ges av: $\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{(-1+\boldsymbol{i})\boldsymbol{t}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-\boldsymbol{i} \end{pmatrix} = \mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}(\cos \boldsymbol{t} + \boldsymbol{i}\sin \boldsymbol{t})\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \boldsymbol{i}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Real- och imaginärdelen av den komplexa lösningen ger två linjärt oberoende lösningar.

$$\mathbf{X_1} = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cos \boldsymbol{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin \boldsymbol{t}\right\} = \mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\begin{pmatrix} \cos \boldsymbol{t} \\ 2\cos \boldsymbol{t} + \sin \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\left\{-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos \boldsymbol{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\sin \boldsymbol{t}\right\} = \mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\begin{pmatrix} \sin \boldsymbol{t} \\ -\cos \boldsymbol{t} + 2\sin \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$$

Allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = \boldsymbol{c}_1\mathbf{X_1} + \boldsymbol{c}_2\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{c}_1\mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\begin{pmatrix} \cos \boldsymbol{t} \\ 2\cos \boldsymbol{t} + \sin \boldsymbol{t} \end{pmatrix} + \boldsymbol{c}_2\mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\begin{pmatrix} \sin \boldsymbol{t} \\ -\cos \boldsymbol{t} + 2\sin \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$.

Egenvärdenas realdel är negativ detta ger att då $\boldsymbol{t}$ växer obegränsat kommer $\mathbf{X}(\boldsymbol{t})$ att gå mot nollvektorn.

Partikeln går mot origo längs en spiral, då $\boldsymbol{t}$ växer obegränsat.

SVAR: Den stationära punkten, origo, är en stabil spiralpunkt.

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$.

Partikeln går mot origo längs en spiral, då $\boldsymbol{t}$ växer obegränsat.

7. En tunn platta som ges av $z = 1 + xy,\ x^2 + y^2 \le 9$ har masstätheten $\sqrt{1+x^2+y^2}$ per ytenhet i varje punkt (x,y,z) på plattan. Bestäm plattans totala massa.
Parameterframställ även ytan samt bestäm utgående från detta ytelementet $d\sigma$.
<u>Lösning:</u>

Den totala massan ges av $M = \iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma$, där S är den aktuella plattan.

Vi projicerar ytan S på xy-planet.

Då är ytelementet $d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$, där γ är vinkeln mellan normalen och z-axeln.

En normal till ytan ges av $\mathbf{n} = grad(1 + xy - z) = (y,x,-1)$.

En enhetsnormal till ytan ges av $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{(y,x,-1)}{\sqrt{y^2+x^2+1}}$ och således är $\cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{y^2+x^2+1}}$..

Massan är $M = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+x^2+y^2}\dfrac{dxdy}{\left|\dfrac{-1}{\sqrt{y^2+x^2+1}}\right|} = \iint_{D_{xy}} (1+x^2+y^2)dxdy$.

Inför polära koordinater: $M = \iint_{D_{r\theta}} (1+r^2)rdrd\theta$, där $D_{r\theta} = \{(r,\theta):\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Integration ger: $M = 2\pi\left(\dfrac{3^2}{2} + \dfrac{3^4}{4}\right) = 9\pi\left(1 + \dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{99\pi}{2}$.

Ytelementet $d\sigma$ kan beräknas enligt $d\sigma = |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|dxdy$, där $\mathbf{r} = (x,y,1+xy)$.

$\mathbf{r}'_x = (1,0,y)$ och $\mathbf{r}'_x = (0,1,x)$ vilket ger $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-y,-x,1)$ och således $d\sigma = \sqrt{y^2+x^2+1}dxdy$

SVAR: Den totala massan $M = \dfrac{99\pi}{2}$ och ytelementet $d\sigma = \sqrt{y^2+x^2+1}dxdy$.

8. Vilka kurvor $y = y(x)$ i planet har egenskapen att normalen till en godtycklig punkt (x,y) på kurvan skär x-axeln i punkten $(x+1,0)$?
<u>Lösning:</u>

I en godtycklig punkt (x_0,y_0) på kurvan är tangentens lutning $y'(x_0)$ och normalens $-\dfrac{1}{y'(x_0)}$.

Normalens ekvation är därför $-\dfrac{1}{y'(x_0)} = \dfrac{y-y_0}{x-x_0}$.

Punkten $(x_0+1,0)$ skall ligga på normalen, vilket ger $-\dfrac{1}{y'(x_0)} = \dfrac{0-y_0}{x_0+1-x_0}$, $y'(x_0)y_0 = 1$.

Detta skall gälla i varje punkt (x_0,y_0) på kurvan, vilket ger differentialekvationen $y'y = 1$.
Vi har en separabel differentialekvation. Multiplicera med två och integrera.

Vi får $y^2 = 2x + C$ eller $y = \pm\sqrt{2x+C}$ där $x > -\dfrac{C}{2}$.

SVAR: De sökta kurvorna är $y = \pm\sqrt{2x+C}$ där $x > -\dfrac{C}{2}$.

9. Den 2-periodiska funktionen $f(x) = |x| + x$, $-1 < x < 1$ kan utvecklas i en Fourierserie.
Bestäm Fourierseriens värde för $x = 1$.
<u>Lösning:</u> Den givna funktionen ej kontinuerlig, men funktionen och dess derivata är styckvis kontinuerlig på hela reella axeln.

Fourierseriens summa för $x = 1$ blir medelvärdet $\dfrac{f(1+) + f(1-)}{2} = \dfrac{0 + 2\cdot 1}{2} = 1$.

SVAR: Den sökta Fourierseriens seriesumma för $x = 1$ är lika med ett.

10. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Tillämpa b) på fundamentalmatrisen $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

<u>Lösning:</u>
a) I en fundamentalmatris Φ till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ består kolumnerna av de linjärt oberoende lösningarna till systemet. Då matrisen $\mathbf{A}$ är nxn krävs n linjärt oberoende lösningar.
b) Varje kolumn i fundamentalmatrisen Φ uppfyller systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ medför att även fundamentalmatrisen uppfyller systemet, dvs $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$.
Matrisen $\mathbf{A}$ bestäms genom att multiplicera ekvationen $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$ från höger med inversen till Φ.
Denna invers existerar ty determinanten för en fundamentalmatris är alltid skild från noll på grund av att lösningarna är linjärt oberoende.
Efter multiplikationen får vi $\Phi'\Phi^{-1} = \mathbf{A}\Phi\Phi^{-1}$ eller $\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1}$.
c) Bestäm inversen till fundamentalmatrisen.

Den är $\Phi^{-1} = \dfrac{1}{5e^{3t}}\begin{pmatrix} 2e^{4t} & -3e^{4t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{t} & -3e^{t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{pmatrix}$

och derivatan av fundamentalmatrisen är $\Phi' = \begin{pmatrix} -e^{-t} & 12e^{4t} \\ e^{-t} & 8e^{4t} \end{pmatrix}$.

Då erhålles den konstanta matrisen

$$\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & 12e^{4t} \\ e^{-t} & 8e^{4t} \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{t} & -3e^{t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & 15 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

SVAR: a) Se ovan
b) $\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1}$
c)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$