KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.

Lördagen den 14 januari 2006, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 15-22p; 4: 23-31p; 5: 30-35p.
OBS ! Inga bonuspoäng finns ej. OBS !
Uppgifterna: 1-4, 8 ger 3 poäng vardera, 5 och 7 ger 4 poäng vardera, 9 ger 2 poäng samt 6 och 10 ger 5 poäng vardera.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (2x+3y)\,dxdy$$

där D är det ändliga område som begränsas av linjerna $x+y=2,\ y=x$ och $y=0$.

2. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till den autonoma differentialekvationen $y'=y(2-y)(4-y)$.

3. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2x+y \end{pmatrix}$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''+2y'+5y=\delta(t-\frac{\pi}{2})$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0)=1$, $y'(0)=0$, där $\delta(t-\frac{\pi}{2})$ är Diracs deltafunktion.

5. Två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2y''+axy'+by=0$ ges av $y_1=x$ och $y_2=x^2$.
Vidare finns det en motsvarande inhomogen differentialekvation med partikulärlösningen $y_p=x\ln x$.
Bestäm den inhomogena differentialekvationen.

6. En partikels läge bestäms av systemet $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Bestäm eventuella stationära punkter.
Klassificera med avseende på stabilitet och typ. Bestäm systemets allmänna lösning.
Vart tar partikeln vägen då t växer obegränsat om partikelns läge uppfyller $\mathbf{X}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

7. En tunn platta som ges av $z=1+xy,\ x^2+y^2\le 9$ har masstätheten $\sqrt{1+x^2+y^2}$ per ytenhet i varje punkt (x,y,z) på plattan. Bestäm plattans totala massa.
Parameterframställ även ytan samt bestäm utgående från detta ytelementet $d\sigma$.

8. Vilka kurvor $y=y(x)$ i planet har egenskapen att normalen till en godtycklig punkt (x,y) på kurvan skär x-axeln i punkten $(x+1,0)$?

9. Den 2-periodiska funktionen $f(x)=|x|+x$, $-1<x<1$ kan utvecklas i en Fourierserie.
Bestäm Fourierseriens värde för $x=1$.

10. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Tillämpa b) på fundamentalmatrisen $\Phi=\begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$.