KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.

Tisdagen den 14 november 2006, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.
För godkänt krävs att 5 moduler är godkända..
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelning på del 2: 11 ger 4 poäng , 12-13 ger 5 poäng vardera och 14-15 ger 3 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 14 poäng på del 2.
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2006. OBS!

Del 1

Modul 1.

Då en produkt tas ut ur en ugn har den temperaturen 700°C (Celsius). Den svalnar därefter med en avsvalningstakt som är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan produkten själv och det omgivande rummet. En konsult har hyrts in för att utreda denna avsvalningsprocess.
Konsulten föreslår två olika matematiska modeller.
Låt $T(t)$ vara produktens temperatur vid tiden t.

Modell1: $\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{T-40}{3}$. Modell 2: $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{T-30}{3}$.

Bestäm först lösningen till respektive modell och avgör därefter vilken modell som kan vara lämplig.

Lösning:

Differentialekvationerna är linjära av första ordningen.
Lösningen fås som allmän homogen lösning plus en partikulär lösning.
Modell 1:

$T(t) = Ae^{-\frac{t}{3}} + 40$

Vid $t = 0$ är $T = 700$. Detta ger $A = 660$.

Vi får $T(t) = 660e^{-\frac{t}{3}} + 40$.

Modell 2:

$T(t) = Ae^{\frac{t}{3}} + 30$

Vid $t = 0$ är $T = 700$. Detta ger $A = 670$.

Vi får $T(t) = 670e^{\frac{t}{3}} + 30$.

Eftersom det är en avsvalningsprocess är det endast modell1 som är rimlig, ty i modell 2 kommer temperaturen att växa obegränsat.

SVAR: Modell 1: $T(t) = 660e^{-\frac{t}{3}} + 40$. Modell 2: $T(t) = 670e^{\frac{t}{3}} + 30$. Endast modell 1 som är rimlig.

Modul 2.

Bestäm den lösning till ekvationen

$$y' + 4y + \int_0^t 13y(\tau)d\tau = 0$$

som uppfyller villkoret $y(0) = 3$.

Lösning:

Laplacetransformera :

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) + 13\frac{1}{s}Y(s) = 0$$

Insättning av villkoret ger:

$$s^2Y(s) - 3s + 4sY(s) + 13Y(s) = 0$$

Lös ut den obekanta funktionens Laplacetransform

$$Y(s) = \frac{3s}{s^2 + 4s + 13}$$

Omformning ger:

$$Y(s)=\frac{3(s+2-2)}{(s+2)^2+9}=\frac{3(s+2)-2\cdot 3}{(s+2)^2+9}$$

Återtransformering ger:

$$y(t)=e^{-2t}(3\cos 3t-2\sin 3t)$$

SVAR: Den sökta lösningen är

$$y(t)=e^{-2t}(3\cos 3t-2\sin 3t)$$

<u>Modul 3.</u>

Bestäm konstanterna, $b_n,\ n=1,\,2,\,3,$

så att $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx=\begin{cases} x, & \text{då } 0\le x\le \pi/2 \\ \pi-x, & \text{då } \pi/2\le x\le \pi \end{cases}$.

<u>Lösning:</u>

b_n är Fourierkoefficienterna till den udda funktion som på intervallet $[0,\pi]$ ges av

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{då } 0\le x\le \pi/2 \\ \pi-x, & \text{då } \pi/2\le x\le \pi \end{cases}.$$

De sökta koefficienterna ges av $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right)$.

Vi överför den andra integralen till en integral med samma intervall som den första integralen.

Sätt: $u=\pi-x,\ du=-dx,\ \pi/2\to\pi/2,\ \pi\to 0,$

Vidare är $\sin n(\pi-u)=\sin n\pi\cos nu-\cos n\pi\sin nu=(-1)^{n+1}\sin nu$

Insättning ger $b_n=\frac{2}{\pi}(1-(-1)^{n+2})\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx$.

Vi ser att för jämna n är $b_n=0$, dvs $b_{2m}=0$.

För de udda heltalen erhålles: $b_{2m+1}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(2m+1)x\,dx$.

Integration ger oss $b_{2m+1}=\frac{4}{\pi}\left(0-\int_0^{\pi/2} 1\,\frac{-\cos(2m+1)x}{2m+1}\,dx\right)=\frac{4}{\pi}\,\frac{\sin\frac{(2m+1)\pi}{2}}{(2m+1)^2}=\frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}$.

SVAR: De sökta konstanterna blir $b_{2m}=0$ respektive $b_{2m+1}=\frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}$.

<u>Modul 4.</u>

Betrakta ett linjärt system $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ av två differentialekvationer. Matrisen $\mathbf{A}$ har reella element.

Vidare är det känt att ett egenvärde är $-1+2i$ och en tillhörande egenvektor är $\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$.

Bestäm den allmänna lösningen till systemet.

Avgör vad som händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten $(4,1)$.

<u>Lösning:</u>

En partikel som placeras i punkten $(4,1)$ kommer efter lång tid att gå mot den kritiska punkten origo, ty realdelen av egenvärdet är mindre än noll.

Med hjälp av det givna egenvärdet och tillhörande egenvektor erhålles en komplex lösning $\mathbf{Z}=e^{(-1+2i)t}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$.

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger två linjärt oberoende lösningar.
Dessa bildar varsin kolonn i en fundamentalmatris.

$$\mathbf{X_1}=\operatorname{Re}\mathbf{Z}=\operatorname{Re}\left\{e^{-t}(\cos 2t+i\sin 2t)\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right\}=e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\ -\sin 2t\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2=\operatorname{Im}\mathbf{Z}=\operatorname{Im}\left\{e^{-t}(\cos 2t+i\sin 2t)\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right\}=e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}$$

En fundamentalmatris är $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t \\ -e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen till systemet ges av: $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C}$, där $\mathbf{C}$ är en konstant vektor.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t \\ -e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^{-t}\cos 2t \\ -e^{-t}\sin 2t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-t}\sin 2t \\ e^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}$$

Även här kan partikelns öde avslöjas, ty $e^{-t} \to 0$, $t \to \infty$.

SVAR: Den allmänna lösningen till systemet ges av:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t \\ -e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^{-t}\cos 2t \\ -e^{-t}\sin 2t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-t}\sin 2t \\ e^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}.$$

En partikel som placeras i punkten $(4,1)$ kommer efter lång tid att gå mot den kritiska punkten, origo.

Modul 5. Beräkna dubbelintegralen $\iint_{D_{xy}} \frac{ye^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

där $D_{xy} = \left\{(x,y): 1 \le x^2+y^2 \le 4, -y \le x \le y\right\}$.

Lösning:

Det aktuella området är en fjärdedels "ananasskiva".

Vi inför polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad dxdy = r dr d\theta$.

Området D_{xy} beskrivs i polära koordinater: $D_{r\theta} = \left\{(r,\theta): 1 \le r \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Insättning ger: $\iint_{D_{xy}} \frac{ye^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint_{D_{r\theta}} \frac{r\sin\theta e^{r^2}}{r}\,r dr d\theta = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left\{\int_{r=1}^{2} r\sin\theta e^{r^2}\,dr\right\} d\theta$

$$\iint_{D_{xy}} \frac{ye^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \frac{e^4-e}{2}2\cos\frac{\pi}{4} = \frac{e^4-e}{\sqrt{2}} = \frac{e^4-e}{2}\sqrt{2}$$

SVAR: Dubbelintegralen $\iint_{D_{xy}} \frac{ye^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \frac{(e^4-e)\sqrt{2}}{2}$.

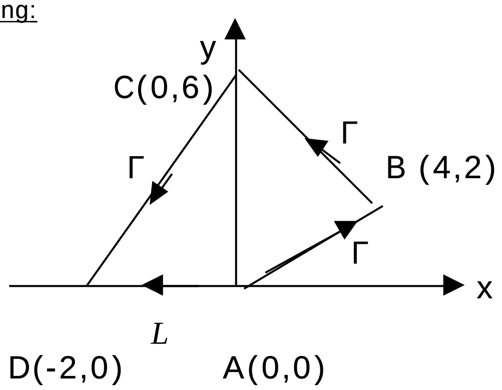
Modul 6.

Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma (e^{x+y} + y^3\sin x)dx + (e^{x+y} - 3y^2\cos x)dy$$

där Γ är vägen $ABCD$ sammansatt av de räta linjestyckena AB, BC och CD där $A = (0,0)$, $B = (4,2)$, $C = (0,6)$ och $D = (-2,0)$ med orienteringen given av punkternas uppräkning.

Lösning:



Vi undersöker om linjeintegralen är oberoende vägen.

Det givna fältet och dess derivator är kontinuerligt.

Studera derivatorna $\frac{\partial Q}{\partial x}$ och $\frac{\partial P}{\partial y}$, där $P(x,y)=e^{x+y}+y^3\sin x$ och $Q(x,y)=e^{x+y}-3y^2\cos x$.

Vi får $\frac{\partial Q}{\partial x}=e^{x+y}+3y^2\sin x$ och $\frac{\partial P}{\partial y}=e^{x+y}+3y^2\sin x$.

Linjeintegralen är oberoende vägen.

Vi byter väg. Tag den räta linjen L.

Parameterframställ linjen: $\begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} dx=dt \\ dy=0 \end{cases}$ $t:0\to -2$.

Insättning i linjeintegralen ger:

$$\int_\Gamma (e^{x+y}+y^3\sin x)dx+(e^{x+y}-3y^2\cos x)dy=\int_{t=0}^{-2} e^t dt=e^{-2}-1=\frac{1-e^2}{e^2}.$$

SVAR: Den sökta linjeintegralen är

$$\int_\Gamma (e^{x+y}+y^3\sin x)dx+(e^{x+y}-3y^2\cos x)dy=\frac{1-e^2}{e^2}.$$

<u>Anmärkning:</u> En alternativ lösning är att bestämma en potential $U(x,y)$.

En sådan ges av $U(x,y)=e^{x+y}-y^3\cos x$. Då är den sökta linjeintegralen

$$\int_\Gamma (e^{x+y}+y^3\sin x)dx+(e^{x+y}-3y^2\cos x)dy=U(-2,0)-U(0,0)=e^{-2}-1.$$

<u>Del 2</u>

11.

I en enkel populationsmodell för antalet individer, $P(t)$, är den relativa tillväxthastigheten konstant, a.

I en annan modell är den relativa tillväxthastigheten summan av två termer.

Den ena termen är en positiv konstant, a, och den andra termen är proportionell mot populationen med en negativ proportionalitetskonstant, b.

En tredje modell erhålles genom att korrigera den andra modellen på följande sätt:

avlägsna ett konstant antal per tidsenhet, c. Ställ upp dessa modeller.

Studera därefter vad som händer efter lång tid, då konstanterna sätts till $a=5$, $b=-1$ och $c=4$.

<u>Lösning:</u>

Vi ställer först upp de tre modellerna.

Modell 1: Den relativa tillväxthastigheten

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}=a$$

Omformad blir differentialekvationen

$$\frac{dP(t)}{dt}=aP(t)$$

Modell 2: Den relativa tillväxthastigheten

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}=a+bP(t)$$

Omformad blir differentialekvationen

$$\frac{dP(t)}{dt}=(a+bP(t))P(t)$$

Modell 3: Avlägsna ett konstant antal per tidsenhet c

$$\frac{dP(t)}{dt}=(a+bP(t))P(t)-c$$

Nu över till en analys av de tre modellerna. Insättning av aktuella konstanter.

Modell 1:

$$\frac{dP(t)}{dt}=5P(t)$$

Här finns en stationär lösning, $P(t)=0$, vilken är instabil. Populationen växer obegränsat.

Modell 2:

$$\frac{dP(t)}{dt} = (5 - P(t))P(t)$$

Här finns två stationära lösningar, $P(t) = 0$ och $P(t) = 5$.
För startpopulationer i intervallet 0 till 5 är derivatan positiv och populationen växande.
För startpopulationer större än 5 är derivatan negativ och populationen avtagande.
Efter lång tid kommer populationen att gå mot 5.

Modell 3:

$$\frac{dP(t)}{dt} = (5 - P(t))P(t) - 4 = 5P(t) - P^2(t) - 4 = (P(t) - 1)(4 - P(t))$$

Här finns två stationära lösningar, $P(t) = 1$ och $P(t) = 4$.
För startpopulationer i intervallet 0 till 1 är derivatan negativ och populationen dör ut.
För startpopulationer i intervallet 1 till 4 är derivatan positiv och populationen växande.
För startpopulationer större än 4 är derivatan negativ och populationen avtagande.
Efter lång tid kommer populationen att dö ut om startpopulationen är mindre än 1.
Är startpopulationen större än 1 kommer den efter lång tid att gå mot 4.

För startpopulationer lika med de stationära lösningarna kommer populationerna att förbli konstanta.

SVAR: Se ovan.

12.
a. Bestäm de lösningar till differentialekvationen $y'' + \lambda y = 0$, λ är större än noll, som uppfyller randvillkoren $y(0) = 0$ och $y'(L) = 0$.
b. Visa att de i a) erhållna funktionerna är ortogonala på intervallet $[0, L]$.
c. Bestäm de lösningar till den partiella differentialekvationen $u'_t = u''_x$ som uppfyller randvillkoren $u(0,t) = 0$ och $u'_x(L,t) = 0$.

<u>Lösning:</u>

a) λ är större än noll gör att vi kan sätta $\lambda = \mu^2$ där $\mu \in R$.
Insättning i differentialekvationen ger $y'' + \mu^2 y = 0$. De karakteristiska rötterna är $r = \pm i\mu$.
Lösningarna är på formen $y = A\cos\mu x + B\sin\mu x$.
Vi utnyttjar de givna randvillkoren. Då behövs även $y' = -\mu A\sin\mu x + \mu B\cos\mu x$.

Randvillkoren ger oss följande system: $\begin{cases} y(0) = 0 = A \\ y'(L) = 0 = -\mu A\sin\mu L + \mu B\cos\mu L \end{cases}$.

Icke-triviala lösningarna erhålles då $\cos\mu L = 0$, dvs då $\mu L = \frac{(2n-1)\pi}{2}$, $n = 1,2,\ldots\ldots$.

De icke-triviala lösningarna är på formen $y = B_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$, $n = 1,2,\ldots$.

Även linjärkombinationer av dessa är lösningar.

b) Vi visar att inre produkten $\int_0^L \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\,dx = 0$, $n \neq m$.

Vi omformar vänstra ledet. $VL = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{\cos\frac{(2n-2m)\pi x}{2L} - \cos\frac{(2n+2m-2)\pi x}{2L}\right\}dx$

Integration ger: $VL = \frac{1}{2}\left[-\frac{2L}{(2n-2m)\pi}\sin\frac{(2n-2m)\pi x}{2L} + \frac{2L}{(2n+2m-2)\pi}\sin\frac{(2n+2m-2)\pi x}{2L}\right]_0^L = 0$

Vi har erhållit $\int_0^L \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\,dx = 0$, $n \neq m$.

c) Vi använder variabelseparation för att bestämma lösningar till den partiella differentialekvationen $u'_t = u''_x$. Sätt $u(x,t) = X(x)T(t)$

Insättning ger: $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$. Denna ekvation kan skrivas $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \text{konstant} = \lambda_1$.

Den partiella differentialekvationen övergår i ett system: $\begin{cases} X''(x) - \lambda_1 X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda_1 T(t) = 0 \end{cases}$.

Här observerar vi att x-ekvationen med motsvarande randvillkor svarar mot deluppgift a.
Med $\lambda_1 = -\lambda$ övergår x-ekvationen i $X''(x) + \lambda X(x) = 0$.
Randvillkoren $u(0,t) = 0$ och $u'_x(L,t) = 0$ tillsammans med variabelseparationen $u(x,t) = X(x)T(t)$
Ger randvillkoren $X(0) = 0$ och $X'(L) = 0$.

Detta innebär att $X = B_n \sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}$, $n = 1,2,\ldots$.

Vidare har "T-ekvationen" lösningar på formen $T = C_n e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 t}$, $n = 1,2,\ldots$.
Lösningar till den partiella differentialekvationen är på formen

$$u_n(x,t) = a_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 t} \quad , \ n = 1,2,\ldots$$

Även linjärkombinationer är lösningar.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 t}$$

SVAR: a) De icke-triviala lösningarna är på formen $y = B_n \sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}$, $n = 1,2,\ldots$.

b) Se ovan

c) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 t}$

13. Vad menas med fundamentallösningar till systemet av linjära differentialekvationer $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$.

Systemet har följande lösningar: $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 14e^t \\ 7e^t \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_4 = \begin{pmatrix} 4e^t + 3e^{3t} \\ 2e^t + 3e^{3t} \end{pmatrix}$.

Bestäm en fundamentalmatris till systemet. Bestäm därefter den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
Låt matrisen $\mathbf{B}$ vara 2x2 och ha multipelt egenvärde λ med endast en tillhörande egenvektor $\mathbf{K}$.
Ange först en lösning, $\mathbf{X}_1$, till systemet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{BX}$. Matrisen $\mathbf{B}$ är konstant.
Redovisa därefter hur en av $\mathbf{X}_1$ linjärt oberoende lösning till systemet kan bestämmas.

<u>Lösning:</u>

Fundamentallösningar är linjärt oberoende lösningar som spänner upp lösningsrummet.
För att bestämma en fundamentalmatris behövs i detta fall två linjärt oberoende lösningar.
$\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ är linjärt oberoende av varandra. Däremot är $\mathbf{X}_3$ linjärt oberoende av $\mathbf{X}_1$.
Vidare är $\mathbf{X}_4$ en linjärkombination av $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$. Vi väljer $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$.

Då bli en fundamentalmatris $\Phi = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{3t} \\ e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$.

Varje kolonn i fundamentalmatrisen uppfyller systemet. Vi har ekvationen $\dot{\Phi} = \mathbf{A}\Phi$.
Vi får den konstanta matrisen $\mathbf{A}$ genom att multiplicera från höger med fundamentalmatrisens invers.

Vi erhåller $\mathbf{A} = \dot{\Phi}\Phi^{-1}$. Fundamentalmatrisens invers $\Phi^{-1} = \dfrac{1}{e^{4t}}\begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ -e^t & 2e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-3t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix}$.

Vi får $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2e^t & 3e^{3t} \\ e^t & 3e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-3t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

En lösning är $\mathbf{X}_1 = e^{\lambda t}\mathbf{K}$. Vi ansätter $\mathbf{X}_2 = e^{\lambda t}(\mathbf{E}t + \mathbf{F})$ där $\mathbf{E}$ och $\mathbf{F}$ är konstanta matriser.

Insättning i systemet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{BX}$ ger $e^{\lambda t}\lambda(\mathbf{E}t+\mathbf{F}) + e^{\lambda t}\mathbf{E} = \mathbf{B}e^{\lambda t}(\mathbf{E}t+\mathbf{F})$.

Identifiering ger följande system: $\begin{cases} t: \ \lambda\mathbf{E} = \mathbf{BE} \\ t^0: \lambda\mathbf{F} + \mathbf{E} = \mathbf{BF} \end{cases} \quad \begin{cases} (\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{E} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{F} = \mathbf{E} \end{cases} \quad \begin{cases} (\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{E} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{F} = \mathbf{0} \end{cases}$.

Matrisen $\mathbf{E}$ är en egenvektor till $\mathbf{B}$ och $\mathbf{F}$ en generaliserad egenvektor till $\mathbf{B}$.

SVAR: En fundamentalmatris är $\Phi = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{3t} \\ e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$ och matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

För övrigt se ovan.

14. Ur en kropp definierad av olikheterna $x^2 + y^2 \le z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ och $z \ge 0$ stansas ut med cylindern $4x^2 + 4y^2 \le 1$. Beräkna den återstående volymen.

Lösning:

Den återstående volymen ges av trippelintegralen $V = \iiint_V dxdydz$.

Integration med avseende på z ger $V = \iiint_V dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \right\} dxdy$.

Vi får $V = \iiint_V dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left\{ \sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right\} dxdy$.

Skärningen mellan konen och sfären fås ur ekvationerna: $x^2 + y^2 = z^2$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Detta ger $2(x^2 + y^2) = 1$, dvs en cirkel med radien lika med $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Området i xy-planet är den cirkelring som ges av $\left\{ (x,y): \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$.

Vi inför polära koordinater.

$$V = \iint_{D_{r\theta}} \left\{ \sqrt{1-r^2} - r \right\} r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\{ \int_{r=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \sqrt{1-r^2} - r \right\} r dr \right\} d\theta$$

$$V = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} \right]_{r=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\pi}{3} \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \right\} = \frac{\pi}{12}\left(3\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{2}\right)$$

SVAR: Den sökta volymen är $V = \frac{\pi}{12}\left(3\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{2}\right)$ v.e.

15. Bestäm den generaliserade integralen $\int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{u=0}^{t} \cos 2u \ (t-u)^2 \ e^{-3t} du \right\} dt$.

Lösning:

Integralen kan omformas till följande dubbelintegral: $\int_{t=0}^{\infty} \left\{ e^{-3t} \int_{u=0}^{t} \cos 2u \ (t-u)^2 du \right\} dt$.

Den inre integralen är en faltningsintegral.

Den sökta integralen är Laplacetransformen för faltningen med $s = 3$ insatt.

$$\int_{t=0}^{\infty} \left\{ e^{-st} \int_{u=0}^{t} \cos 2u \ (t-u)^2 du \right\} dt = L\{\cos 2t\} \ L\{t^2\} = \frac{s}{s^2+4} \ \frac{2}{s^3} = \frac{2}{(s^2+4)s^2}.$$

Insättning av $s = 3$ ger den sökta integralen.

$$\int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{u=0}^{t} \cos 2u \; (t-u)^2 \; e^{-3t} du \right\} dt = \frac{2}{(3^2+4)3^2} = \frac{2}{117}.$$

SVAR: Dubbelintegralen är lika med $\dfrac{2}{117}$.